



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3, \text{ para } m \in \mathbb{R}. \\ x + 3y + 2z = m \end{cases}$$

a) Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro m el sistema tiene una única solución.

[1 punto]

b) Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.

[1 punto]

2. Sean el plano de ecuación $\pi : x + y - z = 0$ y el punto $P = (2, 3, 2)$.

a) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano π .

[1 punto]

b) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto P .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de

ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sea la función $f(x) = a \cdot e^{-x^2 + bx}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

a) Calcule los valores de a y de b para los cuales la función tiene un extremo relativo en el punto $(1, e)$.

[1 punto]

b) Para el caso $a = 3$ y $b = 5$, calcule la asíntota horizontal de la función f cuando x tiende a $+\infty$.

[1 punto]

4. Se sabe que una función $f(x)$ está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Se sabe también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en este punto es $y = -124x + 249$ y que $f(-3) = -4$.

a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$.

[1 punto]

b) Calcule $\int_{-3}^2 f'(x) dx$.

[1 punto]

5. Sean las rectas $r_1 : x - 1 = \frac{y - 2}{-1} = z - 5$ y $r_2 : (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2 .

[1 punto]

b) Indique qué condición debe cumplirse para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 . Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 .

[1 punto]

6. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de k la matriz

$A + kI$ tiene inversa. Encuentre, si existe, la matriz inversa de $A - 2I$.

[1 punto]

b) Calcule la matriz X que satisface la ecuación $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$, donde A^T es la matriz transpuesta de la matriz A .

[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3, \text{ para } m \in \mathbb{R}. \\ x + 3y + 2z = m \end{cases}$
a) Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro m el sistema tiene una única solución.	[1 punto]
b) Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.	[1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 18 + 18 - 8 - 18 - 108 = -50 \neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo el rango de la matriz A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución) para cualquier valor del parámetro m .

b) Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & m \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 6 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \\ -6 \quad -18 \quad -12 \quad -6m \\ \hline 0 \quad -15 \quad -10 \quad 5-6m \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 4 \quad 6 \quad 3 \\ -3 \quad -9 \quad -6 \quad -3m \\ \hline 0 \quad -5 \quad 0 \quad 3-3m \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & m \\ 0 & -5 & 0 & 3-3m \\ 0 & -15 & -10 & 5-6m \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -15 \quad -10 \quad 5-6m \\ 0 \quad 15 \quad 0 \quad -9+9m \\ \hline 0 \quad 0 \quad -10 \quad -4+3m \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & m \\ 0 & -5 & 0 & 3-3m \\ 0 & 0 & -10 & -4+3m \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+2z=m \\ -5y=3-3m \\ -10z=-4+3m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+2z=m \\ \boxed{y=\frac{3-3m}{-5}=\frac{3m-3}{5}} \\ \boxed{z=\frac{-4+3m}{-10}=\frac{4-3m}{10}} \end{array} \right\} \Rightarrow x+3\frac{3m-3}{5}+2\frac{4-3m}{10}=m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{9m-9}{5}+\frac{8-6m}{10}=m \Rightarrow 10x+2(9m-9)+8-6m=10m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x+18m-18+8-6m=10m \Rightarrow 10x=-2m+10 \Rightarrow \boxed{x=\frac{10-2m}{10}=\frac{5-m}{5}}$$

El punto solución del sistema es $\left(\frac{5-m}{5}, \frac{3m-3}{5}, \frac{4-3m}{10}\right)$.

2. Sean el plano de ecuación $\pi : x + y - z = 0$ y el punto $P = (2, 3, 2)$.

a) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano π .

[1 punto]

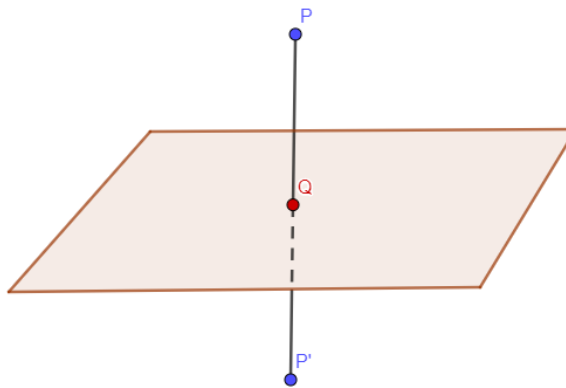
b) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto P .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ con la expresión } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

a) Debemos hallar las coordenadas del punto P' del dibujo.



Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto P . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, -1) \\ P = (2, 3, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del punto Q intersección de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \\ \pi : x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda + 3 + \lambda - 2 + \lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 2, 3)}$$

Hallamos las coordenadas del punto P' como el resultado de sumarle al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) - (2, 3, 2) = (-1, -1, 1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) + (-1, -1, 1) = (0, 1, 4)$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π tiene coordenadas $P'(0, 1, 4)$.

b) Un plano paralelo a $\pi: x + y - z = 0$ tiene ecuación $\pi': x + y - z + D = 0$.

Hallamos la expresión de la distancia del punto P al plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \pi': x + y - z + D = 0 \\ P(2, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi') = \frac{|2 + 3 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|D + 3|}{\sqrt{3}}$$

Hacemos que la distancia del punto P al plano π' sea $\sqrt{3}$.

$$d(P, \pi') = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|D + 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |D + 3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} D + 3 = 3 \rightarrow \boxed{D = 0} \\ D + 3 = -3 \rightarrow \boxed{D = -6} \end{cases}$$

Si $D = 0$ el plano tiene ecuación $\pi: x + y - z = 0$

Si $D = -6$ el plano tiene ecuación $\pi': x + y - z - 6 = 0$.

3. Sea la función $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

a) Calcule los valores de a y de b para los cuales la función tiene un extremo relativo en el punto $(1, e)$. [1 punto]

b) Para el caso $a=3$ y $b=5$, calcule la asíntota horizontal de la función f cuando x tiende a $+\infty$. [1 punto]

a) Si la función tiene un extremo relativo en el punto $(1, e)$ se cumplen dos cosas: la función pasa por el punto $(1, e)$, es decir, $f(1) = e$ y la derivada se anula para $x=1$, es decir, $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = e \\ f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx} \end{array} \right\} \Rightarrow e = a \cdot e^{-1^2+b} \Rightarrow e = a \cdot e^{b-1} \Rightarrow \frac{e}{e^{b-1}} = a \Rightarrow a = e^{1-b+1} \Rightarrow \boxed{a = e^{2-b}}$$

La función queda $f(x) = e^{2-b} \cdot e^{-x^2+bx} = e^{-x^2+bx-b+2}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{-x^2+bx-b+2} \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2+bx-b+2}(-2x+b) \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = e^{-1^2+b-b+2}(-2+b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = e \cdot (-2+b) \Rightarrow -2+b = 0 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Para $b=2$ tenemos que $a = e^{2-2} = e^0 = 1$.

Los valores buscados son $a=1$ y $b=2$.

b) Para el caso $a=3$ y $b=5$ la función queda $f(x) = 3 \cdot e^{-x^2+5x}$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot e^{-x^2+5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{x^2-5x}} = \frac{3}{e^{+\infty}} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

La asíntota horizontal de la función tiene ecuación $y = 0$.

4. Se sabe que una función $f(x)$ está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Se sabe también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en este punto es $y = -124x + 249$ y que $f(-3) = -4$.

a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$. [1 punto]

b) Calcule $\int_{-3}^2 f'(x) dx$. [1 punto]

a) Si tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$ la derivada segunda se anula para este valor $\rightarrow f''(2) = 0$.

Si la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 2$ es $y = -124x + 249$ entonces la pendiente de la recta tangente es -124 que es el valor de la derivada en $x = 2 \rightarrow f'(2) = -124$.

Al ser la recta $y = -124x + 249$ tangente a la función en $x = 2$ el valor de la función coincide con el valor de la recta para este valor $\rightarrow f(2) = -124 \cdot 2 + 249 = 1$.

b) $\int_{-3}^2 f'(x) dx = [f(x)]_{-3}^2 = f(2) - f(-3) = 1 - (-4) = 5$.

5. Sean las rectas $r_1 : x-1 = \frac{y-2}{-1} = z-5$ y $r_2 : (x, y, z) = (2-3\lambda, -1+\lambda, 2)$.

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2 . [1 punto]

b) Indique qué condición debe cumplirse para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 . Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 . [1 punto]

a) El plano π que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2 tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas y contiene el punto $P_1(1, 2, 5)$ de la recta r_1 .

$$r_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (1, -1, 1) \\ P_1(1, 2, 5) \end{cases}$$

$$r_2 : (x, y, z) = (2-3\lambda, -1+\lambda, 2) \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_2 = (-3, 1, 0) \\ Q_2(2, -1, 2) \end{cases}$$

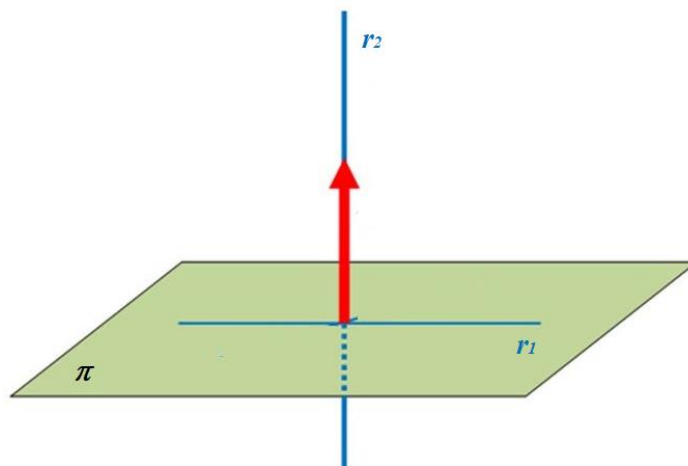
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_1 = (1, -1, 1) \\ \vec{u} = \vec{u}_2 = (-3, 1, 0) \\ P_1(1, 2, 5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(y-2) + z-5 - 3(z-5) - x+1 = 0 \Rightarrow -3y+6+z-5-3z+15-x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-3y-2z+17=0 \Rightarrow \boxed{\pi : x+3y+2z-17=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi : x+3y+2z-17=0$.

b) Para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 los vectores directores de las rectas deben ser perpendiculares.



Estudiamos si el ángulo que forman nuestras rectas es de 90° , es decir, si su producto escalar vale cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_2 = (-3, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 = (1, -1, 1)(-3, 1, 0) = -3 - 1 + 0 = -4 \neq 0$$

Los vectores directores no forman un ángulo de 90° y no existe el plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 .

6. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de k la matriz $A + kI$ tiene inversa. Encuentre, si existe, la matriz inversa de $A - 2I$. [1 punto]
- b) Calcule la matriz X que satisface la ecuación $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$, donde A^T es la matriz transpuesta de la matriz A . [1 punto]

a) Obtenemos la expresión de la matriz $A + kI$.

$$A + kI = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k & 0 \\ 1 & 1 & 1+k \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula este determinante.

$$\begin{aligned} |A + kI| &= \begin{vmatrix} -1+k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k & 0 \\ 1 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = (-1+k)(-1+k)(1+k) - (-1+k) = \\ &= (-1+k)[(-1+k)(1+k) - 1] = (-1+k)[-1+k^2-1] = (-1+k)(k^2-2) \end{aligned}$$

$$|A + kI| = 0 \Rightarrow (-1+k)(k^2-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1+k = 0 \rightarrow \boxed{k=1} \\ k^2-2 = 0 \rightarrow k^2 = 2 \rightarrow \boxed{k = \pm\sqrt{2}} \end{cases}$$

La matriz $A + kI$ tiene inversa si k es distinto de 1, de $-\sqrt{2}$ y de $+\sqrt{2}$.

Para $k = -2$ la matriz $A - 2I$ tiene inversa. La calculamos.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1-2 & 0 & 1 \\ 0 & -1-2 & 0 \\ 1 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 3 = -6 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 (A-2I)^{-1} &= \frac{\text{Adj}\left((A-2I)^T\right)}{|A-2I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-6} = \\
 &= \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X \cdot A + A^T = 2 \cdot X \Rightarrow XA - 2X = -A^T \Rightarrow X(A-2I) = -A^T \Rightarrow X = -A^T(A-2I)^{-1}$$

Determinamos la expresión de X.

$$\begin{aligned}
 X &= -A^T(A-2I)^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3+3 & -1+3 & -3+9 \\ 3 & -2+3 & 9 \\ 3+3 & 1+3 & 3+9 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1/6 & 3/2 \\ 1 & 2/3 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$