

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible.

[2 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

[1 punto]

- b) Resuelva el sistema para el caso $k = -1$.

[1 punto]

3. Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

- a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

[1 punto]

- b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia que hay de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al

plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. Considere la función $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.
- a) Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?
[1 punto]
- b) Observe que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo $(0, 2)$? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.
[1 punto]
5. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.
- a) Calcule para qué valores del parámetro a se cumple la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, ambas de orden 2.
[1 punto]
- b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso $a = \sqrt{2}$.
[1 punto]
6. Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.
- a) Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
[1 punto]
- b) Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.
[1 punto]



Institut
d'Estudis
Catalans