



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible.
 [2 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real k :

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ x + k^2y + 3z &= 2k \\ 3x + 7y + 7z &= k - 3 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

[1 punto]

- b) Resuelva el sistema para el caso de $k = -1$.

[1 punto]

3. Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

- a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

[1 punto]

- b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

[1 punto]

4. Considere la función: $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$

- a) Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?

[1 punto]

- b) Observe que $f(-2) = \frac{-2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo $(0, 2)$? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

[1 punto]

5. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valores del parámetro a se cumple la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, ambas de orden 2.

[1 punto]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$.

[1 punto]

6. Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

a) Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.

[1 punto]

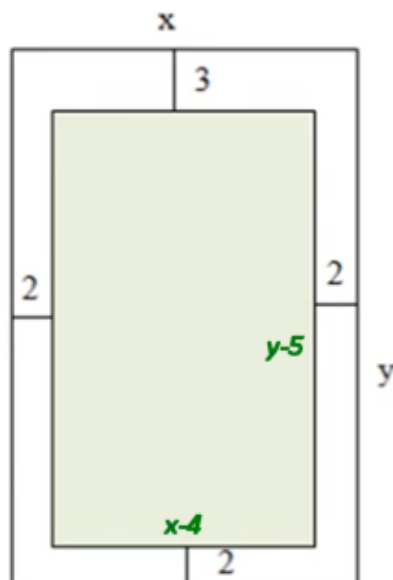
b) Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.

[1 punto]

SOLUCIONES

1. Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible. [2 puntos]

Realicemos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



La zona sombreada es la destinada a escribir. Es la que debemos maximizar.

Función objetivo: $f(x, y) = (x - 4)(y - 5)$.

Las condiciones son: $x \cdot y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{x}$

La función queda

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = (x - 4)(y - 5) \\ y = \frac{600}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = (x - 4) \left(\frac{600}{x} - 5 \right) = x \cdot \frac{600}{x} - 5x - 4 \cdot \frac{600}{x} + 20$$

$$f(x) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20$$

$$f(x) = 620 - 5x - \frac{2400}{x}$$

Para maximizar esta función la derivamos e igualamos a cero para averiguar sus puntos críticos.

$$f(x) = 620 - 5x - \frac{2400}{x} \Rightarrow f'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -5 + \frac{2400}{x^2} = 0 \Rightarrow -5x^2 + 2400 = 0$$

$$5x^2 = 2400 \Rightarrow x^2 = \frac{2400}{5} = 480 \Rightarrow x = \sqrt{480} = 21,9\dots$$

Veamos el signo de la derivada antes y después de este valor 21,9.

- En $(0, \sqrt{480})$ tomamos el valor 1 y la derivada vale $f'(1) = -5 + \frac{2400}{1^2} = 2395 > 0$. La función crece en este intervalo.

- En $(\sqrt{480}, +\infty)$ tomamos el valor 30 y la derivada vale

$$f'(30) = -5 + \frac{2400}{30^2} = -2,3 < 0. \text{ La función decrece en este intervalo.}$$

La función presenta un máximo en $x = \sqrt{480}$.

Las dimensiones que maximizan la zona impresa son $x = \sqrt{480} \approx 21,9$ cm e

$$y = \frac{600}{\sqrt{480}} \approx 27,38 \text{ cm.}$$

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real k :

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ x + k^2y + 3z &= 2k \\ 3x + 7y + 7z &= k - 3 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k . [1 punto]
 b) Resuelva el sistema para el caso de $k = -1$. [1 punto]

a) La discusión del sistema parte del estudio del valor del determinante de la matriz de los coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 7k^2 + 27 + 14 - 6k^2 - 21 - 21 = k^2 - 1$$

Si igualamos a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \sqrt{1} = \pm 1$$

Hay tres casos a considerar.

CASO 1. $k \neq -1$ y $k \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $k = -1$

El sistema queda

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ x + y + 3z &= -2 \\ 3x + 7y + 7z &= -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & +3z & = -2 \\ -x & -3y & -2z & = 1 \\ \hline & -2y & +z & = -1 \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 3 · Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 3x & +7y & +7z & = -4 \\ -3x & -9y & -6z & = 3 \\ \hline & -2y & +z & = -1 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ -2y + z &= -1 \\ -2y + z &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª es igual a ecuación 3ª} \\ \text{Podemos eliminar la 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ -2y + z &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x + 2z &= -1 - 3y \\ z &= -1 + 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + 2(-1 + 2y) = -1 - 3y \Rightarrow x - 2 + 4y = -1 - 3y \Rightarrow \boxed{x = 1 - 7y}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Las soluciones son $x = 1 - 7t$; $y = t$; $z = -1 + 2t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

CASO 3. $k = 1$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=2 \\ 3x+7y+7z=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x+y+3z=2 \\ -x-3y-2z=1 \\ \hline -2y+z=3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 3x+7y+7z=-1 \\ -3x-9y-6z=3 \\ \hline -2y+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=3 \\ -2y+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ -2y+z=2 \\ 2y-z=-3 \\ \hline 0=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=3 \\ 0=-1 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible.

- b) Las soluciones se han obtenido en el apartado anterior y son $x=1-7t$; $y=t$; $z=-1+2t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

3. Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

a) Calcule la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que debe seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano? [1 punto]

b) Encuentre las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron. [1 punto]

a) Se habla de proyectar ortogonalmente el punto P sobre el plano. La recta se obtiene a partir de su vector director (el vector normal del plano) y sabiendo que pasa por P.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n} = (3, 0, 4) \\ \text{Pasa por } P(2, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ r: y = -3 \\ z = 1 + 4t \end{array} \right.$$

La distancia del punto $P = (2, -3, 1)$ al plano $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$ se calcula con la fórmula:

$$\text{Distancia}(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = \boxed{5 \text{ u}}$$

b) Hay que hallar el punto de corte de la recta hallada en el apartado anterior y el plano. Resolvamos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x + 4z + 15 = 0 \\ \left. \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ r: y = -3 \\ z = 1 + 4t \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(2 + 3t) + 4(1 + 4t) + 15 = 0 \Rightarrow 6 + 9t + 4 + 16t + 15 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 25t + 25 = 0 \Rightarrow t = \frac{-25}{25} = -1 \Rightarrow y = -3 \\ \left. \begin{array}{l} x = 2 - 3 = -1 \\ z = 1 - 4 = -3 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Las coordenadas del punto pedido son $P'(-1, -3, -3)$.

4. Considere la función: $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$

a) Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical? [1 punto]

b) Observe que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo $(0, 2)$? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función. [1 punto]

a) El dominio de la función al ser una fracción es $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$.

La continuidad: es continua en todo el dominio.

La asíntota vertical es $x = 1$ lo comprobamos calculando el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x} = \frac{2 - 5 + 4}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

b) $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$ es continua en $(-2, 0)$ y la función cambia de signo de un extremo a otro del intervalo $f(-2) = -\frac{2}{3} < 0$, $f(0) = 4 > 0$, luego existe un valor $c \in (-2, 0)$ donde $f(c) = 0$.

$f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$ es continua en $(0, 2)$ y la función cambia de signo de un extremo a otro del intervalo $f(0) = 4 > 0$ y $f(2) = -10 < 0$ luego existe un valor $c \in (0, 2)$ donde $f(c) = 0$.

El intervalo $(-2, -1)$ cumple que $f(-2) = -\frac{2}{3} < 0$ y $f(-1) = \frac{-2 + 5 + 4}{1 + 1} = \frac{7}{2} > 0$ luego aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c \in (-2, -1)$ donde $f(c) = 0$.

5. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valores del parámetro a se cumple la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, ambas de orden 2. [1 punto]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre una expresión general para calcular la matriz inversa de la matriz M y, a continuación, calcule la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$. [1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} M^2 - M - 2I = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+a^2-1-2 & a-a \\ a-a & a^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-2 & 0 \\ 0 & a^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2-2=0 \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) Sacamos factor común M en la igualdad.

$$\begin{aligned} M^2 - M - 2I = 0 &\Rightarrow M^2 - M = 2I \Rightarrow M(M - I) = 2I \Rightarrow M \left(\frac{M - I}{2} \right) = I \\ M^{-1} &= \frac{1}{2}(M - I) \end{aligned}$$

Si M cumple la ecuación $M^2 - M - 2I = 0$ su inversa es $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$

Si $a = \sqrt{2}$ la inversa de M es $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$. Determinamos su expresión.

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6. Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

- a) Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$. [1 punto]
 b) Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior. [1 punto]

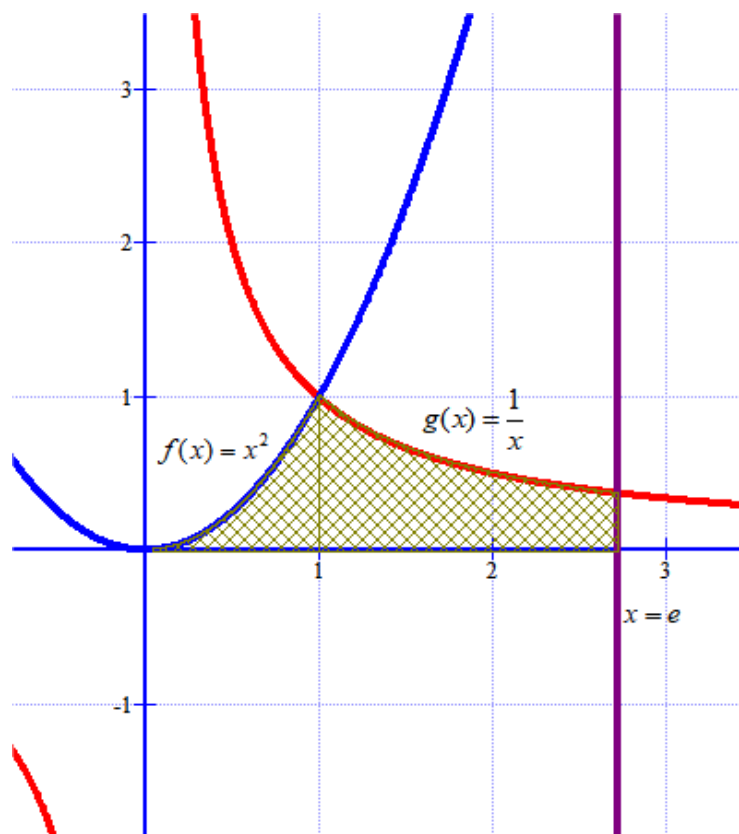
a) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = x^2 \Rightarrow 1 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos sus gráficas y la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas.

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = x^2$
-1	-1	-1	1
1	1	0	0
2	0,5	1	1
4	0,25	2	4
8	0,125	4	16

y la región es



b) El área pedida es una integral definida de la función entre 0 y e .

$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [\ln x]_1^e = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \ln e - \ln 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$