

Matemàtiques

Serie 4

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2 . Se sabe que el precio de la madera es de $7,5 \text{ €/m}$ para los lados horizontales y de $12,5 \text{ €/m}$ para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?

[2 puntos]

2. Sean la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - z = 3$.

- a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta r .

[1 punto]

- b) Encuentre los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia que hay de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al

plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

[1 punto]

- b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1 punto]

4. Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcule los valores de n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

[1 punto]

- b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

[1 punto]

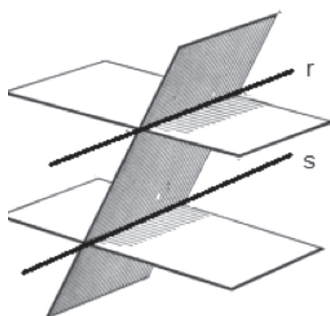
5. Considere los planos $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ y $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$, donde a es un parámetro real.

- a) Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto.

[1 punto]

- b) Compruebe que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la siguiente imagen:

[1 punto]



6. Se sabe que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

- a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

[1 punto]

- b) Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f .

[1 punto]