

**Proves d'accés a la universitat****2019****Matemàtiques****Serie 4**

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2 . Se sabe que el precio de la madera es de $7,5 \text{ €/m}$ para los lados horizontales y de $12,5 \text{ €/m}$ para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?
[2 puntos]

2. Sean la recta $r : \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - z = 3$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta r .

[1 punto]

b) Encuentre los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π .

[1 punto]

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro a .

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1 punto]

4. Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcule los valores de n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

[1 punto]

- b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

[1 punto]

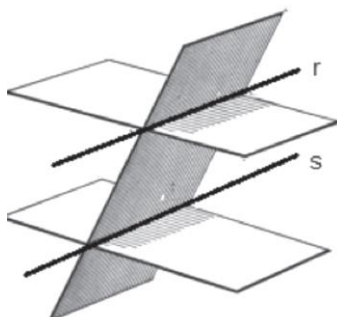
5. Considere los planos $\pi_1 : 2x + ay + z = 5$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, donde a es un parámetro real.

- a) Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto.

[1 punto]

- b) Compruebe que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la siguiente imagen:

[1 punto]



6. Se sabe que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

- a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

[1 punto]

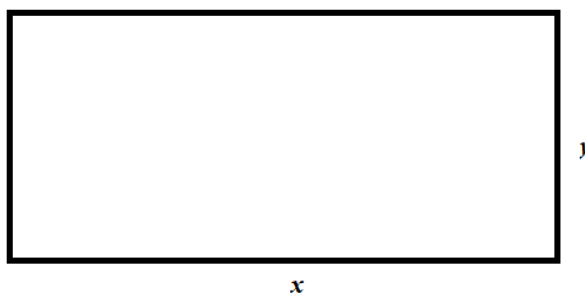
- b) Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f .

[1 punto]

SOLUCIONES

- 1.** Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2 . Se sabe que el precio de la madera es de $7,5 \text{ €/m}$ para los lados horizontales y de $12,5 \text{ €/m}$ para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo? [2 puntos]

Llamamos x a la longitud la parte horizontal del marco rectangular e y a la longitud de la parte vertical.



El área del rectángulo es de 2 m^2 , por lo que $x \cdot y = 2$.

El coste total del marco es $C(x, y) = 7.5 \cdot 2x + 12.5 \cdot 2y = 15x + 25y$.

Como $x \cdot y = 2$ entonces $y = \frac{2}{x}$. Sustituimos en la función coste y obtenemos una función dependiente solo de la variable x .

$$\left. \begin{array}{l} C(x, y) = 15x + 25y \\ y = \frac{2}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow C(x) = 15x + 25 \frac{2}{x} = 15x + \frac{50}{x}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$C(x) = 15x + \frac{50}{x} \Rightarrow C'(x) = 15 - \frac{50}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 15 - \frac{50}{x^2} = 0 \Rightarrow 15 = \frac{50}{x^2} \Rightarrow 15x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1.826$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si el punto crítico obtenido es un máximo o un mínimo.

$$C'(x) = 15 - \frac{50}{x^2} = 15 - 50x^{-2} \Rightarrow C''(x) = 100x^{-3} = \frac{100}{x^3} \Rightarrow C''\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{100}{\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3} > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la función coste tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Para este valor la longitud de la parte vertical es $y = \frac{2}{\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{\sqrt{30}}{5} \approx 1.095$ y el coste del marco

es de $C\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 15\sqrt{\frac{10}{3}} + \frac{50}{\sqrt{\frac{10}{3}}} = 10\sqrt{30} \approx 54.77$ euros.

Las dimensiones del marco rectangular de coste mínimo son $\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1.826$ metros en la parte horizontal y $\frac{\sqrt{30}}{5} \approx 1.095$ metros en la parte vertical, siendo este coste mínimo de un importe aproximado de 54.77 euros.

2. Sean la recta $r: \begin{cases} x=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x-z=3$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta r . [1 punto]

b) Encuentre los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π . [1 punto]

a) Hallamos el punto P de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x=2 \\ y-z=1 \end{cases} \\ \pi: x-z=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{x=2} \\ y=1+z \\ x-3=z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y=1+z \\ \boxed{z=2-3=-1} \end{array} \right\} \Rightarrow y=1-1=0 \Rightarrow P(2,0,-1)$$

La recta s perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano. Hallamos la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que lo corta en $P(2,0,-1)$.

$$\pi: x-z=3 \Rightarrow \vec{n}=(1,0,-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (1,0,-1) \\ P(2,0,-1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x=2+\alpha \\ y=0 \\ z=-1-\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

b) Hallamos las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r .

$$r: \begin{cases} x=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2 \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow Q_r(2,1+z,z)$$

Hallamos la expresión de la distancia de un punto Q_r de la recta r al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(2,1+z,z) \\ \pi: x-z-3=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q_r, \pi) = \frac{|2-z-3|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{|-1-z|}{\sqrt{2}}$$

Buscamos el valor de z para que esta distancia valga $\sqrt{8}$.

$$d(Q_r, \pi) = \sqrt{8} \Rightarrow \frac{|-1-z|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \Rightarrow |-1-z| = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1-z=4 \rightarrow -1-4=z \rightarrow z=-5 \rightarrow Q_1(2,-4,-5) \\ -1-z=-4 \rightarrow -1+4=z \rightarrow z=3 \rightarrow Q_2(2,4,3) \end{cases}$$

Los dos puntos que cumplen lo pedido son $Q_1(2,-4,-5)$ y $Q_2(2,4,3)$.

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro a .

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 0 + 5 - 0 - 7 - a = a^2 - a - 2.$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases}$$

Hay tres casos distintos a estudiar.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la columna 3ª y la fila 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 7 = -6 \neq 0$.

El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la columna 3ª (columna 2ª + dos veces la columna 1ª) $\rightarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 + 14 + 3 = 15 \neq 0$. El rango

de A/B es 3.

Rango de $A = 2 \neq 3 =$ Rango de A/B .

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la fila 3ª y la columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 7 = -3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Determinamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la 2ª columna (suma de columna 1ª y 3ª): $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 0 - 0 + 14 - 6 = 0$. El rango de A/B no es 3 y debe ser 2

como el rango de la matriz A.

Rango de A = Rango de A/B = $2 < 3$ = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (caso 3). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 7y + 5z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \\ z = -y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 7y + 5(-y - 2) = 0 \\ x + 2y - y - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 10 = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \{Ecuaciones iguales\} \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 - y \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$, siendo λ cualquier número real.

4. Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcule los valores de n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales. [1 punto]
 b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. [1 punto]

a) La función debe ser continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{4} + n = \frac{0^2}{4} + n = n \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{n=1}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

La función debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2^2}{4} + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{4} + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x}{2} + m = 3 + m \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 + m = 2 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Los valores de n y m que hacen que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales son $m = -1$ y $n = 1$.

b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$ la función queda $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} - 4 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

En el intervalo $[0, 4]$ la función cambia de definición por lo que el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=4$ la determinamos como la suma de dos integrales definidas: una entre 0 y 2 de la función y otra entre 2 y 4. Averiguamos primero si la función corta el eje de abscisas en algún punto.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \rightarrow \text{No es posible} \\ \frac{x^2}{4} - 4 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} = 4 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4 \notin (0, 2] \\ \frac{3x}{2} - 6 = 0 \rightarrow \frac{3x}{2} = 6 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

La función no corta el eje de abscisas en el intervalo $(0, 4)$.

La función es negativa en el intervalo $(0, 2]$, pues si tomamos $x=1$ tenemos que

$$f(1) = \frac{1^2}{4} - 4 = \frac{-15}{4} < 0.$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} - 4 dx = \left[\frac{x^3}{12} - 4x \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{12} - 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{12} - 4 \cdot 0 \right] = \frac{-22}{3}$$

El área de la región 1 tiene un valor de $\frac{22}{3}$ unidades cuadradas.

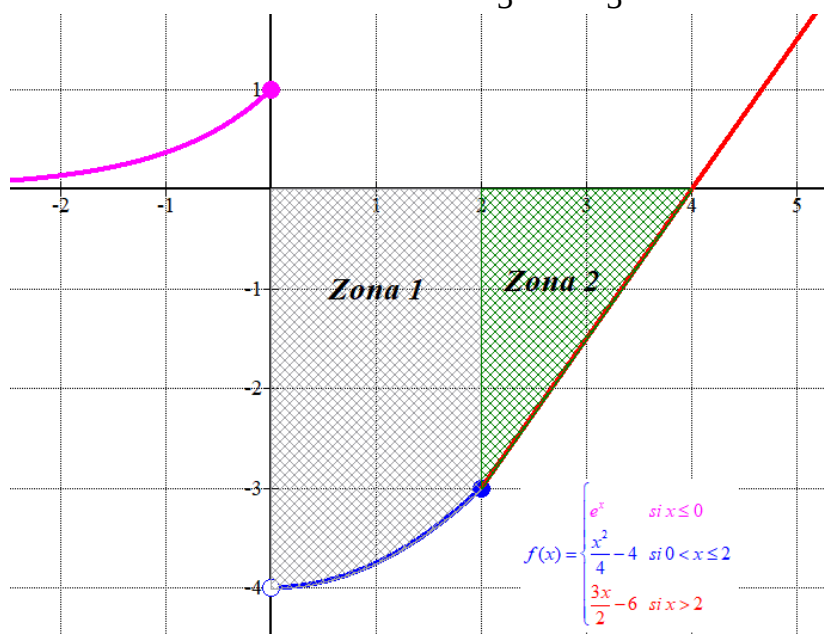
La función es negativa en el intervalo $(2, 4]$, pues si tomamos $x=3$ tenemos que

$$f(3) = \frac{3 \cdot 3}{2} - 6 = \frac{-3}{2} < 0.$$

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{3x}{2} - 6 dx = \left[\frac{3x^2}{4} - 6x \right]_2^4 = \left[\frac{3 \cdot 4^2}{4} - 6 \cdot 4 \right] - \left[\frac{3 \cdot 2^2}{4} - 6 \cdot 2 \right] = -3$$

El área de la región 2 tiene un valor de 3 unidades cuadradas.

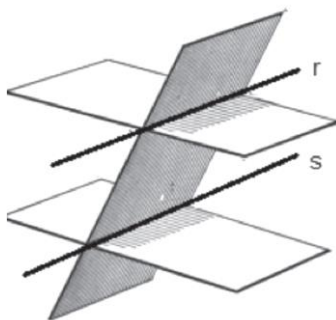
El área total es la suma de las dos áreas obtenidas: $\frac{22}{3} + 3 = \frac{31}{3} \approx 10.333$ unidades cuadradas.



5. Considere los planos $\pi_1 : 2x + ay + z = 5$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, donde a es un parámetro real.

a) Estudie para qué valores del parámetro a los tres planos se cortan en un punto. [1 punto]

b) Compruebe que para el caso $a=1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la siguiente imagen: [1 punto]



a) Nos piden determinar cuando el sistema formado por sus ecuaciones tiene solución única. Para ello el rango de la matriz de coeficientes asociada al sistema y el de la matriz ampliada debe ser 3.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + ay + z = 5 \\ \pi_2 : x + ay + z = 1 \\ \pi_3 : 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0 \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A/B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 5 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando el determinante de A es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a(a+1) + 2a + a+1 - 2a - a(a+1) - 2(a+1) =$$

$$= 2a^2 + 2a + a + 1 - a^2 - a - 2a - 2 = a^2 - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

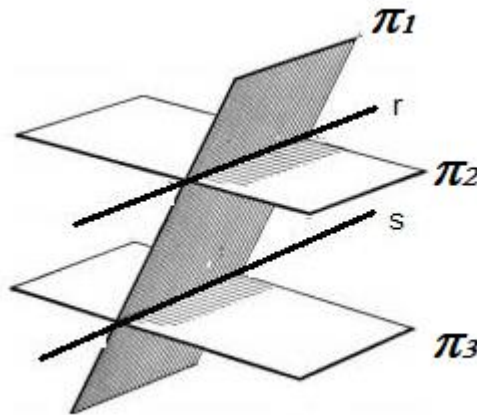
Para que el determinante no se anule y el rango de A sea 3 debe ser un valor de a distinto de -1 y de 1 . En estos casos el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y su única solución son las coordenadas del punto de corte de los tres planos.

b) Para el caso $a=1$ los planos tienen ecuaciones: $\pi_1 : 2x + y + z = 5$, $\pi_2 : x + y + z = 1$ y $\pi_3 : 2x + 2y + 2z = 0 \rightarrow \pi_3 : x + y + z = 0$.

Podemos observar que los planos $\pi_2 : x + y + z = 1$ y $\pi_3 : x + y + z = 0$ son paralelos pues tienen el mismo vector normal $\vec{n}_2 = \vec{n}_3 = (1, 1, 1)$ y no son coincidentes al no tener la misma ecuación. El tercer plano π_1 no es paralelo a ellos, pues tiene un vector normal no proporcional y por tanto es secante a ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x + y + z = 5 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, 1, 1) \\ \pi_3 : x + y + z = 0 \Rightarrow \vec{n}_3 = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

La situación entre los tres planos es la indicada en el dibujo.



La recta r del dibujo tiene ecuación $r : \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\}$ y la recta s tiene ecuación

$s : \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$. Ambas rectas son paralelas pues tienen el mismo vector director $\vec{u}_r = \vec{v}_s = (2, 1, 1) \times (1, 1, 1)$.

- 6.** Se sabe que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es horizontal.
- a)** Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x=1$. [1 punto]
- b)** Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es $y=5$, calcule la expresión de la función f . [1 punto]

a) Para obtener los posibles puntos de inflexión averiguamos cuando se anula la segunda derivada de la función.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x=0$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la segunda derivada vale $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x=1$ y la segunda derivada vale $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ y convexa ($\cup$) en $(0, +\infty)$. La función tiene un punto de inflexión en $x=0$.

Si la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es horizontal significa que su pendiente es 0 y por tanto la derivada se anula para este valor $\rightarrow f'(1) = 0$. Este sería un extremo relativo de la función. Como $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ la función tiene un mínimo relativo en $x=1$.

- b) Si la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es $y=5$ entonces la función pasa por el punto $(1, 5)$.
La derivada de la función es la integral de la segunda derivada.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 6x dx = 3x^2 + K$$

Sabemos que $f'(1) = 0$, por lo que $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + K = 0 \Rightarrow K = -3$.

La derivada queda $f'(x) = 3x^2 - 3$.

La función es la integral de la derivada.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3x^2 - 3 dx = x^3 - 3x + C$$

Sabemos que $f(1) = 5$, por lo que $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + C = 5 \Rightarrow C = 5 + 3 - 1 = 7$.

La función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 3x + 7$.

