



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el rango de la matriz A en función del parámetro a .
[1,25 puntos]

b) Compruebe que $\det(A^2 + A) = 0$
[1,25 puntos]

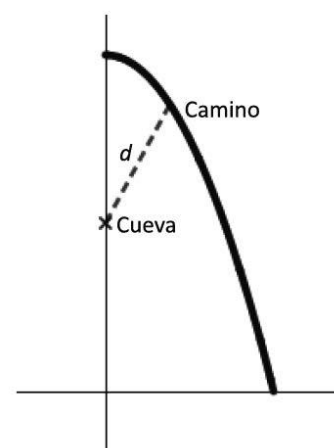
2. Se han encontrado unas pinturas rupestres en una cueva situada en una zona muy pedregosa. Existe un camino que bordea parcialmente la cueva formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(0, 4)$ y $(2, 0)$. La cueva está situada en el punto de coordenadas $(0, 2)$, tal como se muestra en la figura, y quiere habilitarse un acceso rectilíneo d desde el camino a la cueva que sea lo más corto posible.

a) Identifique en la gráfica de la figura las coordenadas de la cueva y del punto del camino desde el cual quiere habilitarse el acceso. Compruebe que la función $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distancia desde cada punto del camino a la cueva.

[1,25 puntos]

b) Calcule las coordenadas del punto del camino que se halla más próximo a la cueva y diga cuál será la longitud del acceso d .

[1,25 puntos]



3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

[1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1,25 puntos]

4. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, donde $\ln$ indica el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$.

a) Calcule las coordenadas del punto de la curva $y = f(x)$ en que la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal. Estudie si este punto es un extremo relativo y clasifíquelo.

[1,25 puntos]

b) Calcule el área del recinto delimitado por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$ y el eje de abscisas.

[1,25 puntos]

5. Considere la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ y la recta s que pasa por el punto

$P = (2, -5, 1)$ y que tiene por vector director $(-1, 0, -1)$.

a) Estudie la posición relativa de las rectas r y s .

[1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a la recta r y contiene la recta s .

[1,25 puntos]

6. Una empresa de cerámica quiere poner a la venta un azulejo cuadrado de 20 cm de lado pintado a dos colores, de manera que la superficie de cada color sea la misma y que si se ponen los azulejos uno al lado de otro se vea un dibujo continuo (figura 1).



Figura 1

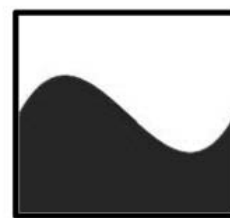


Figura 2

Para ello, la empresa utiliza en cada azulejo la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ encuadrada entre los puntos de coordenadas $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(2, 2)$, tal como se muestra en la figura 2, y usa como unidad de medida el decímetro.

a) Justifique que, efectivamente, esta función permite juntar los azulejos de manera continua y derivable.

[1,25 puntos]

b) Justifique que esta función divide el cuadrado citado en dos partes que tienen la misma superficie.

[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el rango de la matriz A en función del parámetro a .

[1,25 puntos]

b) Compruebe que $\det(A^2 + A) = 0$.

[1,25 puntos]

a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3.

Para que su rango sea 3 su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 2a - 0 - 0 - a = a - 1$$

El determinante de A se anula para $a = 1$. Analizamos dos situaciones distintas.

CASO 1. Si $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3.

CASO 2. Si $a = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de

$$\text{quitar la tercera fila y la tercera columna} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ el rango de A es 3 y si $a = 1$ el rango de A es 2.

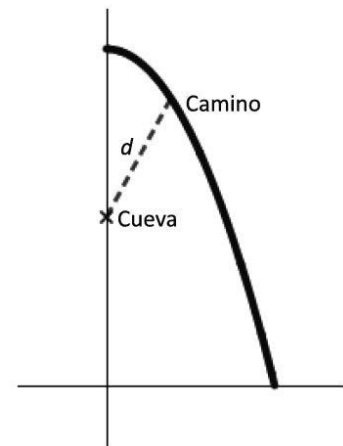
b) Calculamos la expresión de $A^2 + A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+2a & 2+0+2 \\ 1-1+0 & 0+1+a & 2-1+1 \\ 0+a+0 & 0-a+a & 0+a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & 2+a \end{pmatrix}$$

En esta matriz la primera fila es el doble de la segunda fila por lo que su determinante es nulo: $\det(A^2 + A) = 0$.

2. Se han encontrado unas pinturas rupestres en una cueva situada en una zona muy pedregosa. Existe un camino que bordea parcialmente la cueva formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(0, 4)$ y $(2, 0)$. La cueva está situada en el punto de coordenadas $(0, 2)$, tal como se muestra en la figura, y quiere habilitarse un acceso rectilíneo d desde el camino a la cueva que sea lo más corto posible.



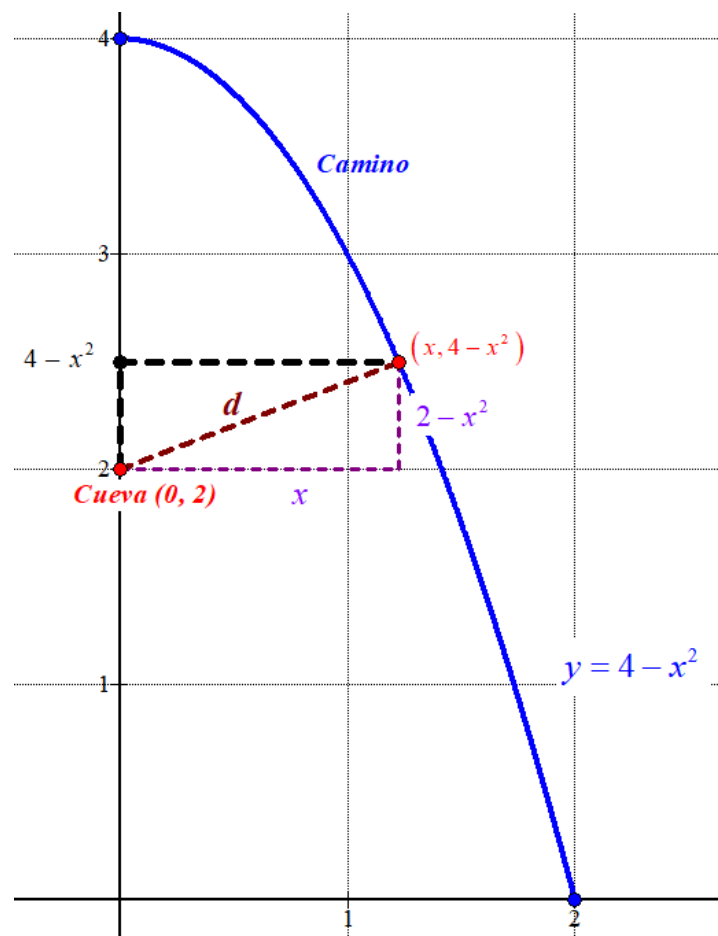
a) Identifique en la gráfica de la figura las coordenadas de la cueva y del punto del camino desde el cual quiere habilitarse el acceso.

Compruebe que la función $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distancia desde cada punto del camino a la cueva.

[1,25 puntos]

b) Calcule las coordenadas del punto del camino que se halla más próximo a la cueva y diga cuál será la longitud del acceso d . [1,25 puntos]

a) Un punto cualquiera del camino pertenece a la gráfica de la función $y = 4 - x^2$ y tiene coordenadas $(x, 4 - x^2)$. Le añadimos al dibujo de partida un triángulo rectángulo de catetos x y $4 - x^2 - 2 = 2 - x^2$. La situación planteada es la del dibujo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos x y $2 - x^2$ para poder determinar la expresión de la distancia d (hipotenusa) en función de x .

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 4 + x^4 - 4x^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}, \text{ siendo } 0 \leq x \leq 2$$

b) Derivamos la función distancia y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \Rightarrow d'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \rightarrow 2x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz, pues el valor negativo no tiene sentido en esta situación.

Nos surgen dos puntos críticos de la función distancia. El intervalo de definición de la función $[0, 2]$ lo dividimos en dos partes y estudiamos el signo de la derivada de 0 a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ a 2.

- En el intervalo $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

$$d'(1) = \frac{2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1}{\sqrt{1^4 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 8}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0. \text{ La función decrece en } \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

- En el intervalo $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right]$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$d'(2) = \frac{2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2^4 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8}} = 5 > 0. \text{ La función crece en } \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right].$$

La función decrece en $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ y crece en $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right]$. La función distancia tiene un mínimo

en $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Para este valor $y = 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

El camino rectilíneo más corto comienza en el punto del camino de coordenadas $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$.

Desde este punto la distancia a la cueva tiene un valor de

$$d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.87$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

[1,25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 0 - 0 - 1 - 2a = a^2 - 2a = a(a - 2).$$

Igualemos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos a estudiar.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La columna 1ª y 3ª son iguales, por lo que

consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª y la fila 1ª $\rightarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. La columna 1ª y 3ª son iguales,

consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 0 + 0 - 0 - 0 - 5 = 0$. El rango de A/B no es 3, por lo que el

rango de A/B es 2, como el de la matriz A .

Rango de $A = 2 =$ Rango de $A/B < 3 =$ N° incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La fila 2ª y la 3ª son iguales, por lo que consideramos el

menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Determinamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

La fila 2ª y 3ª son iguales, por lo que el rango de A/B no puede ser 3. El rango de A/B es 2 como el rango de la matriz A.

Rango de A = Rango de A/B = $2 < 3$ = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a = 0$ o $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (caso 3). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 2ª} = \text{Ecuación 3ª} \} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2 - 2x} \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow x + 2(2 - 2x) + z = 5 \Rightarrow x + 4 - 4x + z = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 1 + 3x} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$, siendo λ cualquier número real.

4. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, donde $\ln$ indica el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$.
- a) Calcule las coordenadas del punto de la curva $y = f(x)$ en que la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal. Estudie si este punto es un extremo relativo y clasifíquelo.
[1,25 puntos]
- b) Calcule el área del recinto delimitado por la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x=1$ y $x=e$ y el eje de abscisas.
[1,25 puntos]

- a) Si la recta tangente a la curva es horizontal significa que la pendiente es 0 y esto significa que la derivada de la función se anula $\rightarrow f'(x) = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}$$

Para $x = e$ la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal.

Como $f(e) = \frac{1}{e} \cdot \ln(e) = \frac{1}{e}$ el punto tiene coordenadas $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = e$ para averiguar si es máximo o mínimo.

- Antes de $x = e$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1 - \ln(2)}{2^2} = 0.077 > 0$.

La función crece antes de $x = e$.

- Después de $x = e$ consideramos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{1 - \ln(3)}{3^2} = -0.011 < 0. \text{ La función decrece después de } x = e.$$

Como crece antes y decrece después la función tiene un máximo relativo en $x = e$.

- b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{x} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

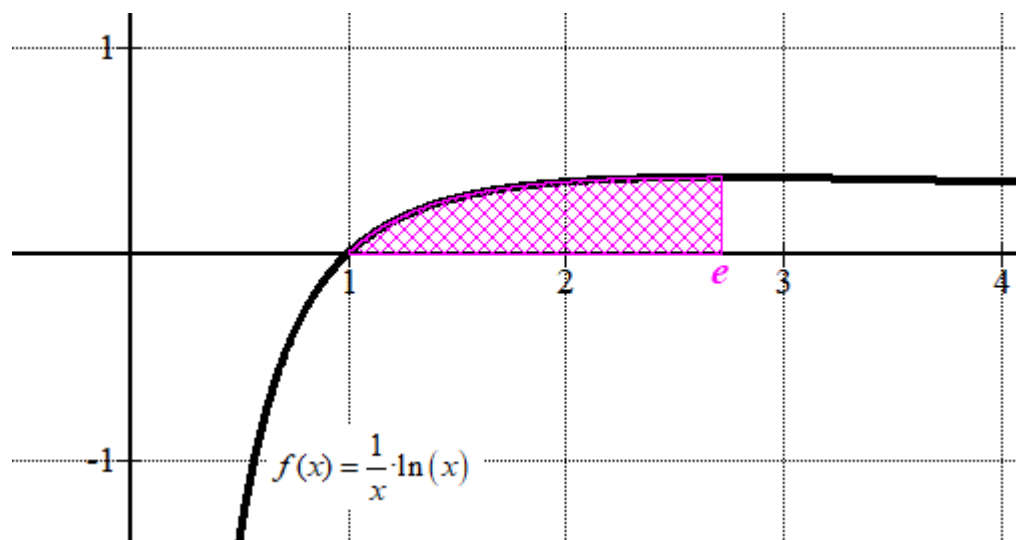
Como este valor está en el extremo del intervalo $[1, e]$ y la función es positiva el área que queremos calcular es el valor de la integral definida de la función entre 1 y e .

$$\text{Área} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \dots$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln(x) = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2(x)}{2} + K$$

$$\dots = \left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = 0.5 \, u^2$$

Hacemos un dibujo para comprobar la solución.



5. Considere la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ y la recta s que pasa por el punto $P = (2, -5, 1)$ y que tiene por vector director $(-1, 0, -1)$.

a) Estudie la posición relativa de las rectas r y s .

[1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a la recta r y contiene la recta s .

[1,25 puntos]

a) Hallamos un vector director de la recta r .

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q_r(1, 3, 0) \\ \vec{v}_r = (2, -2, 1) \end{array} \right\}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{0} \neq \frac{1}{-1}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ_r}]$. Si es nulo las rectas se cortan (existe un plano que las contiene) y si es distinto de cero las rectas se cruzan (no existe plano que las contenga).

$$\left. \begin{array}{l} P(2, -5, 1) \in s \\ Q_r(1, 3, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ_r} = (1, 3, 0) - (2, -5, 1) = (-1, 8, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ_r} = (-1, 8, -1) \\ \vec{v}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ_r}] = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 8 - 0 + 2 + 16 = 6 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.

b) El plano π que es paralelo a la recta r y contiene la recta s tiene como vectores directores los de ambas rectas y contiene el punto $P(2, -5, 1)$ de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P(2, -5, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (-1, 0, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(y+5) + 2(z-1) + y+5 - 2(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y - 10 + 2z - 2 + y + 5 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x - y + 2z - 3 = 0}$$

La ecuación general del plano que es paralelo a la recta r y contiene la recta s es $\pi: -2x - y + 2z - 3 = 0$.

6. Una empresa de cerámica quiere poner a la venta un azulejo cuadrado de 20 cm de lado pintado a dos colores, de manera que la superficie de cada color sea la misma y que si se ponen los azulejos uno al lado de otro se vea un dibujo continuo (figura 1).



Figura 1

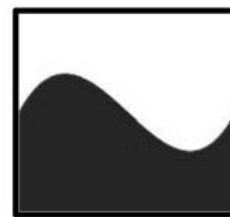


Figura 2

Para ello, la empresa utiliza en cada azulejo la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ encuadrada entre los puntos de coordenadas $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(2, 2)$, tal como se muestra en la figura 2, y usa como unidad de medida el decímetro.

- a) Justifique que, efectivamente, esta función permite juntar los azulejos de manera continua y derivable. [1,25 puntos]
- b) Justifique que esta función divide el cuadrado citado en dos partes que tienen la misma superficie. [1,25 puntos]

- a) Sabemos que, al ser un polinomio, la función $f(x)$ es continua en toda la recta real, y por tanto la continuidad gráfica de las juntas queda probada si se cumple que $f(0) = f(2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(2) = 1$$

De forma análoga, $f(x)$ es derivable en toda la recta real y la junta entre dos azulejos será derivable siempre que la pendiente a la que se llegue, $f'(2)$, sea la misma que la pendiente con la que salimos, $f'(0)$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2 \\ f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 \end{aligned} \right. \Rightarrow f'(2) = f'(0) = 2$$

- b) El azulejo tiene una superficie total de $2 \cdot 2 = 4$ decímetros cuadrados. Calculamos el área de la parte inferior (sombreada) del azulejo.

$$\begin{aligned} \text{Área zona sombreada} &= \int_0^2 x^3 - 3x^2 + 2x + 1 dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 + 0 \right] = 2 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

El área de la zona inferior sombreada del azulejo es de 2 dm^2 y el área total del azulejo es de 4 dm^2 , por lo que la parte superior (blanca) tiene un área de $4 - 2 = 2 \text{ dm}^2$.

La función divide el cuadrado (4 dm^2) en dos partes que tienen la misma superficie (2 dm^2).