



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Calcule los coeficientes a , b , c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$. [2,5 puntos]

2. Considere las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. [1,5 puntos]

- b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$.

Compruebe que las dos matrices son idempotentes. [1 punto]

NOTA: Una matriz cuadrada se denomina *idempotente* si coincide con su cuadrado.

3. Sea $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la derivada de una función derivable $f(x)$ que pasa por el punto

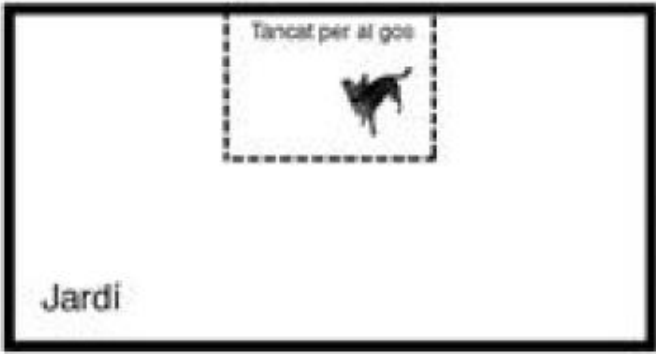
$$A = (0, 3).$$

- a) Calcule la función $f(x)$. [1,5 puntos]

- b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f'(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$. [1 punto]

4. Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

- a)** Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ . [1,25 puntos]
- b)** Para el caso $\lambda = -1$, resuelve el sistema, interprétalo geoméricamente e identifica su solución. [1,25 puntos]
5. Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados. El precio de la valla que desea utilizar es de $2,5 \text{ €/m}$.
- a)** ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo? [1,75 puntos]
- b)** Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta. [0,75 puntos]
- 
6. Sean los planos π_1 y π_2 , determinados por las ecuaciones $\pi_1: x + y = 3$ y $\pi_2: x - z = -2$.
- a)** Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2 , y que pasa por el punto $P = (4, 1, 2)$. [0,75 puntos]
- b)** Sea r la recta de intersección de π_1 y π_2 . Calcule la ecuación vectorial de la recta r . [0,75 puntos]
- c)** Calcule el punto Q de la recta r que está más cerca del punto P . [1 punto]

SOLUCIONES

1. Calcule los coeficientes a , b , c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$. [2,5 puntos]

La función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + bx^2 + d$.

La función pasa por el punto $(1, 0) \rightarrow f(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + d \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + d \Rightarrow \boxed{a + b + d = 0}$$

La función tiene un punto de inflexión en $x = 1 \rightarrow f''(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6a \cdot 1 + 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3a}$$

Si sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + d = 0 \\ b = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3a + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 2a}$$

La función queda $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2a$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2a$ en el punto $(1, 0)$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2a \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 6ax \Rightarrow f'(1) = 3a - 6a = -3a$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)(x - 1) \\ f(1) = 0 \\ f'(1) = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -3a(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -3ax + 3a}$$

Como la tangente es $y = -3x + 3$ tenemos que $-3a = -3$ y que $3a = 3$ por lo que $a = 1$.

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$ y $d = 2$.

2. Considere las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

[1,5 puntos]

b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$.

Compruebe que las dos matrices son idempotentes.

[1 punto]

NOTA: Una matriz cuadrada se denomina *idempotente* si coincide con su cuadrado.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3-5 & 4+3-10 & 0+0-5 \\ -2-4+5 & -2-4+10 & 0+0+5 \\ 2+3-4 & 2+3-8 & 0+0-4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2+0 & -6+8+0 & -10+10+0 \\ -2+1+0 & 3-4+0 & 5-5+0 \\ 2-2+1 & -3+8-3 & -5+10-4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

b)

$$C^2 = C \cdot C = \left\{ C \cdot D = C \right\} = (C \cdot D) \cdot C = C \cdot D \cdot C = C \cdot (D \cdot C) = \left\{ D \cdot C = D \right\} = C \cdot D = \left\{ C \cdot D = C \right\} = C$$

$$D^2 = D \cdot D = \left\{ D \cdot C = D \right\} = (D \cdot C) \cdot D = D \cdot C \cdot D = D \cdot (C \cdot D) = \left\{ C \cdot D = C \right\} = D \cdot C = \left\{ D \cdot C = D \right\} = D$$

3. Sea $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la derivada de una función derivable $f(x)$ que pasa por el punto

$A = (0, 3)$.

a) Calcule la función $f(x)$.

[1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f'(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$. [1 punto]

a) Obtenemos la función integrando la función derivada.

$$x \leq 2 \rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int x-1 dx = \frac{x^2}{2} - x + A$$

$$x > 2 \rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + B$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + A, & \text{si } x \leq 2 \\ \ln|x-1| + B, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Como la función pasa por el punto $A(0, 3) \rightarrow f(0) = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{2} - x + A \\ f(0) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = \frac{0^2}{2} - 0 + A \Rightarrow A = 3$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + 3, & \text{si } x \leq 2 \\ \ln|x-1| + B, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

La función es derivable y por tanto debe ser continua en $x = 2 \rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{4}{2} - 2 + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{2} - x + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln|x-1| + B = \ln|2-1| + B = B \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = 3$$

La expresión de la función es $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + 3, & \text{si } x \leq 2 \\ \ln|x-1| + 3, & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

b) En el punto de abscisa $x = 3$ la función derivada es $f'(x) = \frac{1}{x-1}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 3$ es $y - f'(3) = f''(3)(x-3)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(3) = \frac{-1}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(3) = \frac{1}{2} \\ f''(3) = -\frac{1}{4} \\ y - f'(3) = f''(3)(x-3) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$$

4. Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ . [1,25 puntos]

b) Para el caso $\lambda = -1$, resuelve el sistema, interprétalo geoméricamente e identifica su solución.

[1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2 + \lambda \\ 2 + \lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2 + \lambda & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz

ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2 + \lambda & 0 \\ 2 + \lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2 + \lambda & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2 + \lambda \\ 2 + \lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2 + \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8\lambda^3 + (2 + \lambda)^3 - 2\lambda(2 + \lambda) - 2\lambda(2 + \lambda) - 2\lambda(2 + \lambda) =$$

$$= 1 + 8\lambda^3 + (2 + \lambda)^3 - 6\lambda(2 + \lambda) = 1 + 8\lambda^3 + 8 + \lambda^3 + 3 \cdot 4\lambda + 3 \cdot 2\lambda^2 - 12\lambda - 6\lambda^2 =$$

$$= 1 + 8\lambda^3 + 8 + \lambda^3 + \cancel{12\lambda} + \cancel{6\lambda^2} - \cancel{12\lambda} - \cancel{6\lambda^2} = 9\lambda^3 + 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 9\lambda^3 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt[3]{-1} = -1}$$

Se nos plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\lambda \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\lambda = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad -2 \quad 3 \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad -3 \\ 2 \quad -4 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad -3 \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -2 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

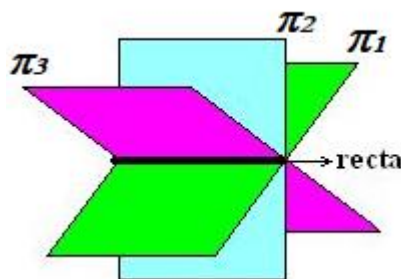
- b) Para el caso $\lambda = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \boxed{y = 1 + z} \end{cases} \Rightarrow$$

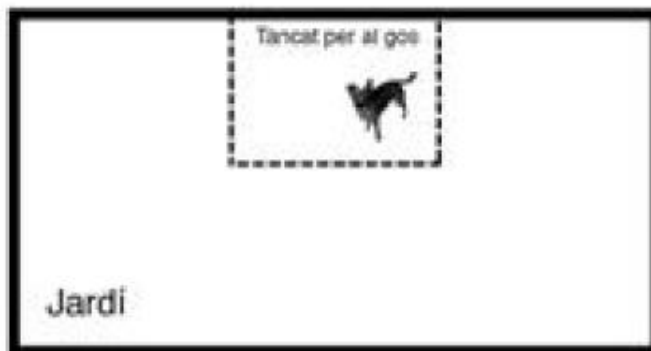
$$\Rightarrow x - 2(1 + z) + z = 0 \Rightarrow x - 2 - 2z + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2 + z} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son los infinitos puntos de la recta donde coinciden los tres planos del sistema (cada una de las ecuaciones).

$$\begin{cases} \pi_1 : x - 2y + z = 0 \\ \pi_2 : x + y - 2z = 3 \\ \pi_3 : -2x + y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$



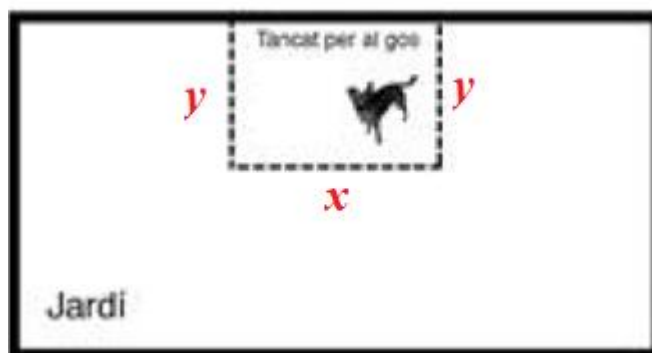
5. Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados. El precio de la valla que desea utilizar es de $2,5 \text{ €/m}$.



a) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo? [1,75 puntos]

b) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta. [0,75 puntos]

a) Llamamos x e y a los dos lados del rectángulo del cercado.



Sabemos que el área del cercado es 8 m^2 .

$$xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

Queremos minimizar el perímetro. Obtenemos su expresión en función de x .

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y) = x + 2y \\ y = \frac{8}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = x + 2 \frac{8}{x} = x + \frac{16}{x}$$

Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = x + \frac{16}{x} \Rightarrow P'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} \\ P'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$$

Solo es posible el valor positivo $x = 4$. Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$P'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = 1 - 16x^{-2} \Rightarrow P''(x) = 32x^{-3} = \frac{32}{x^3} \Rightarrow P''(4) = \frac{32}{4^3} > 0 \rightarrow x = 4 \text{ es mínimo}$$

Para $x = 4$ el perímetro del cercado es mínimo.

Las dimensiones del cercado con perímetro mínimo son $x = 4$ e $y = \frac{8}{4} = 2$



El coste de este cercado es de $2.5(4 + 2 + 2) = 20\text{€}$.

c) En esta nueva situación nos ahorramos dos lados del cercado.



Sabemos que el área del cercado es 8 m^2 .

$$xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

Queremos minimizar el perímetro. Obtenemos su expresión en función de x .

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y) = x + y \\ y = \frac{8}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = x + \frac{8}{x} = x + \frac{8}{x}$$

Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = x + \frac{8}{x} \Rightarrow P'(x) = 1 - \frac{8}{x^2} \\ P'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{8}{x^2} \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{8}}$$

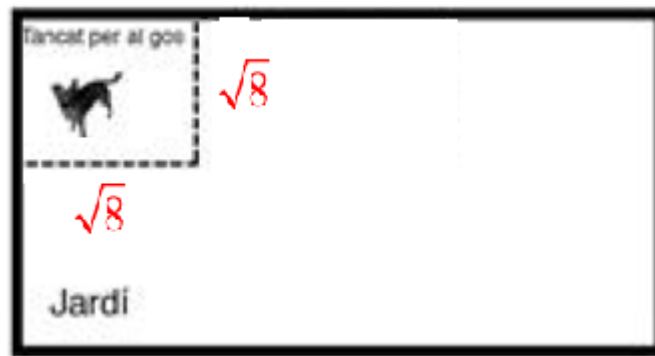
Solo es posible el valor positivo $x = \sqrt{8}$. Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$P'(x) = 1 - \frac{8}{x^2} = 1 - 8x^{-2} \Rightarrow P''(x) = 16x^{-3} = \frac{16}{x^3} \Rightarrow P''(\sqrt{8}) = \frac{16}{(\sqrt{8})^3} > 0 \rightarrow x = \sqrt{8} \text{ es mínimo}$$

Para $x = \sqrt{8}$ el perímetro del cercado es mínimo.

Las dimensiones del cercado con perímetro mínimo son $x = \sqrt{8}$ e $y = \frac{8}{\sqrt{8}} = \sqrt{8}$.

Un cuadrado de lado $\sqrt{8} \simeq 2.83 \text{ metros}$.



El coste de este nuevo cercado es de $2.5(2\sqrt{8}) \approx 14.14 \text{ €}$.

Nos ahorramos $20 - 14.14 = 5.86 \text{ €}$

6. Sean los planos π_1 y π_2 , determinados por las ecuaciones $\pi_1: x + y = 3$ y $\pi_2: x - z = -2$.

a) Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2 , y que pasa por el punto $P = (4, 1, 2)$. [0,75 puntos]

b) Sea r la recta de intersección de π_1 y π_2 . Calcule la ecuación vectorial de la recta r . [0,75 puntos]

c) Calcule el punto Q de la recta r que está más cerca del punto P . [1 punto]

a) El plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2 tiene como vectores directores los vectores normales de los planos π_1 y π_2 .

$$\pi_1: x + y = 3 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\pi_2: x - z = -2 \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, 0, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n}_1 = (1, 1, 0) \\ \vec{v} = \vec{n}_2 = (1, 0, -1) \\ P(4, 1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_3: \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

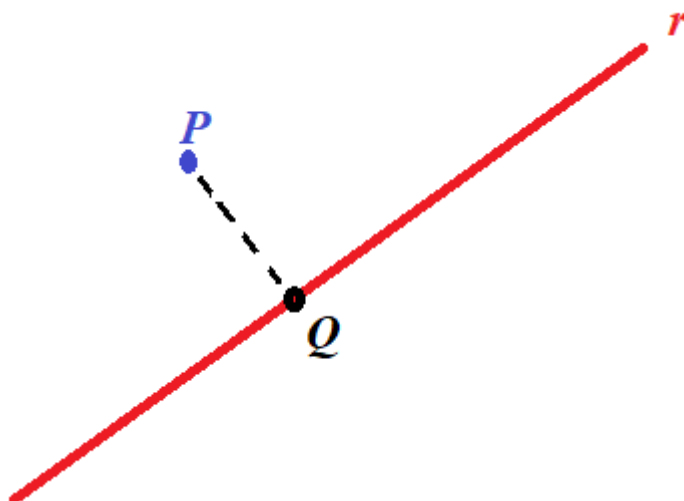
$$\Rightarrow -x + 4 + 0 + 0 - z + 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_3: -x + y - z + 5 = 0}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: x + y = 3 \\ \pi_2: x - z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x = -2 + z \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + z + y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 5 - z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: (x, y, z) = (-2, 5, 0) + \lambda(1, -1, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

c) El punto Q de la recta r que está más cerca del punto P es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r .



Hallamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P y el punto Q buscado es la intersección de recta y plano.

El plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r: (x, y, z) = (-2, 5, 0) + \lambda(1, -1, 1) \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 1)$$

$$\pi: \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ P(4, 1, 2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi: x - y + z + D = 0 \\ P(4, 1, 2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 4 - 1 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \pi: x - y + z - 5 = 0$$

Hallamos el punto Q intersección de plano y recta.

$$\pi: x - y + z - 5 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + \lambda - 5 + \lambda + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 4 = 2 \\ y = 5 - 4 = 1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(2, 1, 4)}$$