



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere las funciones $f(x) = -x^2 + x + 6$ y $g(x) = -9x + 3x^2$.

a) Calcule el área de la región delimitada por las dos funciones.

[1,25 puntos]

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$. Represente esta recta tangente y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en unos mismos ejes de coordenadas.

[1,25 puntos]

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} x - y + kz &= -1 \\ x + ky + z &= 3 \\ 2x + (k-1)y + 2z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema en función del valor de k .

[1,5 puntos]

b) Resuelva el sistema para $k = 0$ y para $k = 1$.

[1 punto]

3. Considere las rectas en el espacio $r : x = -y = z + m$ y $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$, donde m es un parámetro real.

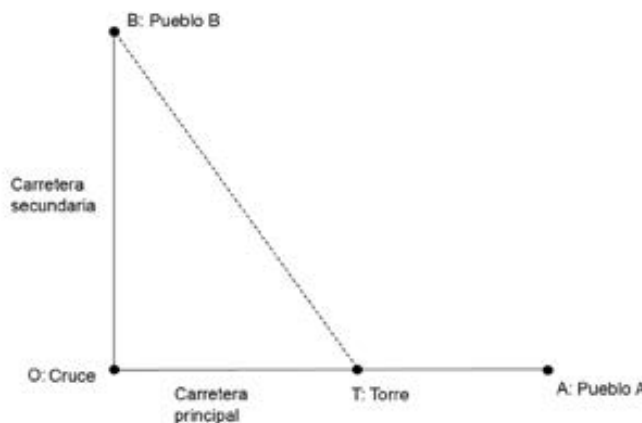
a) Estudie la posición relativa para los distintos valores del parámetro m .

[1,25 puntos]

b) Calcule m para que la distancia entre las rectas r y s sea de $\sqrt{2}$ unidades.

[1,25 puntos]

4. En una carretera principal se encuentra el pueblo A. A 12 km del pueblo A, hay un cruce O con una carretera secundaria que corta perpendicularmente la carretera principal. A 9 km del cruce, en la carretera secundaria, se encuentra el pueblo B. Se quiere construir una torre de comunicaciones T en un punto de la carretera principal situado entre el pueblo A y el cruce O. Esta torre debe estar conectada con cada uno de los dos pueblos en línea recta por cable. Se sabe que instalar el cable entre la torre T y el pueblo B tiene un precio de 250 €/km y, en cambio, instalar el cable entre la torre T y el pueblo A tiene un precio de 125 €/km. Determine a qué distancia del cruce O en la carretera principal hay que situar la torre T para que el precio del cableado sea mínimo y cuál será el valor de este precio mínimo. [2,5 puntos]



5. Considere la familia S de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.
[1,25 puntos]

- b) Encuentre todas las matrices de la familia S, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquen la igualdad $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
[1,25 puntos]

6. Sea la función $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$.

- a) Calcule los valores de los parámetros a y b si se sabe que la gráfica de la función f tiene un extremo relativo en $x = -1$ y pasa por el punto $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$.
[1,25 puntos]
- b) Para el caso $a = b$, calcule y clasifique los extremos relativos de la función.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere las funciones $f(x) = -x^2 + x + 6$ y $g(x) = -9x + 3x^2$.

a) Calcule el área de la región delimitada por las dos funciones. [1,25 puntos]

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$. Represente esta recta tangente y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en unos mismos ejes de coordenadas. [1,25 puntos]

a) Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + x + 6 \\ g(x) = -9x + 3x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + x + 6 = -9x + 3x^2 \Rightarrow 0 = 4x^2 - 10x - 6 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5+7}{4} = 3 = x \\ \frac{5-7}{4} = \frac{-1}{2} = x \end{cases}$$

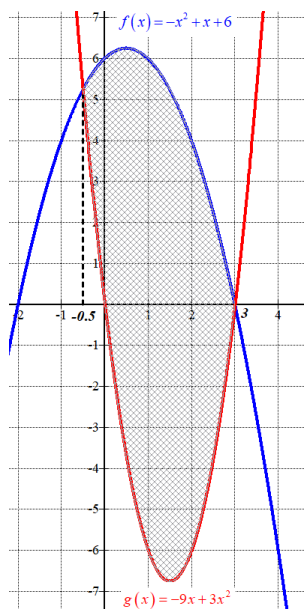
El área de la región delimitada por las dos funciones es el valor absoluto de la integral definida entre -0.5 y 3 de la diferencia de las dos funciones

$$\int_{-0.5}^3 f(x) - g(x) dx = \int_{-0.5}^3 -x^2 + x + 6 - (-9x + 3x^2) dx = \int_{-0.5}^3 -4x^2 + 10x + 6 dx =$$

$$= \left[-4 \frac{x^3}{3} + 5x^2 + 6x \right]_{-0.5}^3 = \left[-4 \frac{3^3}{3} + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \right] - \left[-4 \frac{(-0.5)^3}{3} + 5(-0.5)^2 + 6(-0.5) \right] =$$

$$= -36 + 45 + 18 - \frac{1}{6} - \frac{5}{4} + 3 = \frac{343}{12} \approx 28.58$$

El área de la región delimitada por las dos funciones tiene un valor aproximado de 28.58 unidades cuadradas.



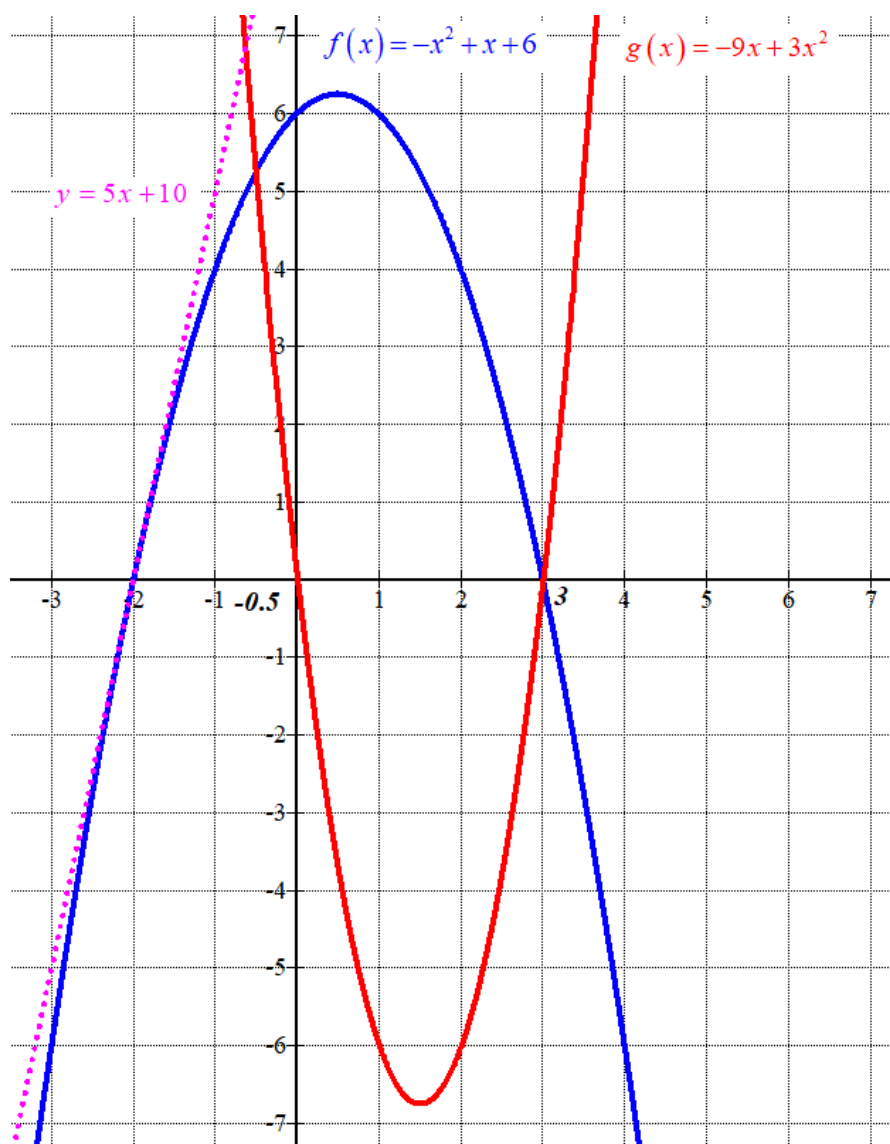
b) Hallamos la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$.

$$f(x) = -x^2 + x + 6 \Rightarrow f'(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(-2) = -2(-2) + 1 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 5 \\ y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 5(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = 5x + 10}$$

La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$ tiene ecuación: $y = 5x + 10$.

x	$y = 5x + 10$	x	$f(x) = -x^2 + x + 6$	x	$g(x) = -9x + 3x^2$
-2	0	-2	0	0	0
-1	5	0	6	1	-6
		1	6	2	-6



2. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} x - y + kz &= -1 \\ x + ky + z &= 3 \\ 2x + (k-1)y + 2z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema en función del valor de k .

[1,5 puntos]

b) Resuelva el sistema para $k = 0$ y para $k = 1$.

[1 punto]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ 2 & k-1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \end{vmatrix} = 2k - 2 + k(k-1) - 2k^2 + 2 - (k-1) =$$

$$= 2k - 2 + k^2 - k - 2k^2 + 2 - k + 1 = -k^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow \boxed{k = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq -1$ y $k \neq 1$.

En este caso el determinante de A no es nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $k = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad -4 \quad -8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -4}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. Si $k=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq -1$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para el caso $k = 0$ el sistema tiene una única solución. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ x + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1 = y \\ z = 3 - x \\ 2x - y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{2x} - x - 1 + 6 - \cancel{2x} = 2 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=3+1=4} \\ \boxed{z=3-3=0} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 4$, $z = 0$.

Para el caso $k = 1$ estamos en el caso 3 estudiado en el apartado anterior y tendrá infinitas soluciones. Resolvemos el sistema utilizando el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ \boxed{y = 2} \end{cases} \Rightarrow x - 2 + z = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. Considere las rectas en el espacio $r: x = -y = z + m$ y $s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$, donde m es un parámetro real.

a) Estudie la posición relativa para los distintos valores del parámetro m . [1,25 puntos]

b) Calcule m para que la distancia entre las rectas r y s sea de $\sqrt{2}$ unidades. [1,25 puntos]

a) Obtenemos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s .

$$r: \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+m}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(0, 0, -m) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = -m + \alpha \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ Q_s(0, 1, 0) \end{cases}$$

Como los vectores directores de las rectas son iguales $\vec{u}_r = \vec{v}_s = (1, -1, 1)$ las rectas son coincidentes o paralelas.

Comprobamos cuando el punto $P_r(0, 0, -m)$ pertenece a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0, 0, -m) \in s? \\ s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \begin{cases} 0 + 0 = 1 \\ 0 + m = 0 \end{cases} ?$$

No se cumple una de las ecuaciones de la recta s independientemente del valor de m .

Para cualquier valor de m el punto $P_r(0, 0, -m)$ no pertenece a la recta s . Las rectas son paralelas para cualquier valor de m .

b) Hallamos la expresión de la distancia entre las dos rectas paralelas como la distancia de un punto cualquiera de la recta r a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 0, -m) \\ Q_s(0, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 1, 0) - (0, 0, -m) = (0, 1, m)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 1, m) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s \times \overrightarrow{P_r Q_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + mj - k + mi = (m+1)i + mj - k = (m+1, m, -1)$$

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_r Q_s}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{(m+1)^2 + m^2 + (-1)^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{m^2 + 1^2 + 2m + m^2 + 1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2m^2 + 2m + 2}}{\sqrt{3}}$$

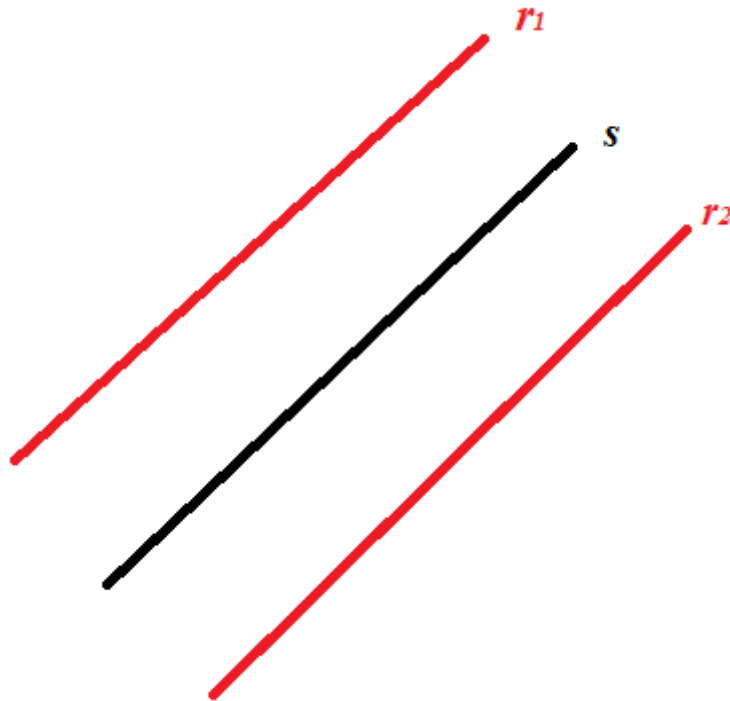
Igualemos esta distancia a $\sqrt{2}$ y despejamos m .

$$d(r, s) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2m^2 + 2m + 2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2m^2 + 2m + 2} = \sqrt{6} \Rightarrow$$

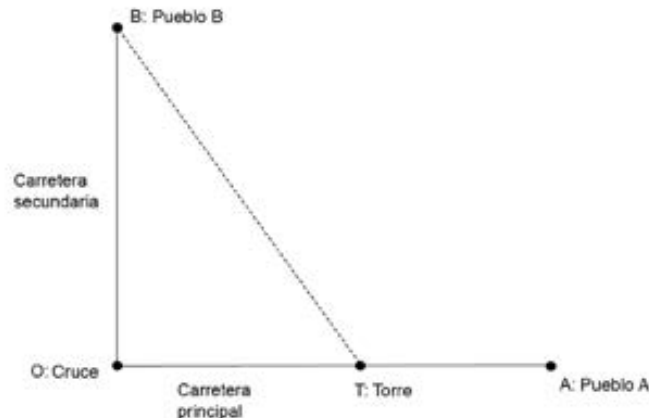
$$\Rightarrow 2m^2 + 2m + 2 = 6 \Rightarrow m^2 + m + 1 = 3 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=m} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=m} \end{cases}$$

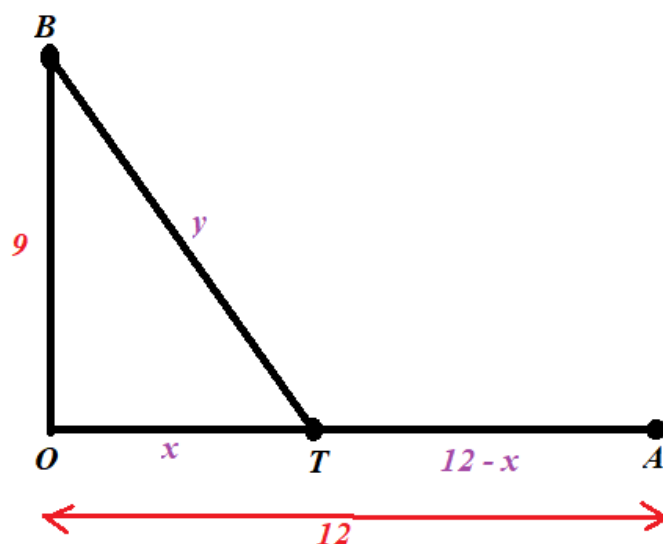
Existen dos valores de m para los que la distancia entre las rectas r y s es de $\sqrt{2}$ unidades: $m=1$ y $m=-2$.



4. En una carretera principal se encuentra el pueblo A. A 12 km del pueblo A, hay un cruce O con una carretera secundaria que corta perpendicularmente la carretera principal. A 9 km del cruce, en la carretera secundaria, se encuentra el pueblo B. Se quiere construir una torre de comunicaciones T en un punto de la carretera principal situado entre el pueblo A y el cruce O. Esta torre debe estar conectada con cada uno de los dos pueblos en línea recta por cable. Se sabe que instalar el cable entre la torre T y el pueblo B tiene un precio de 250 €/km y, en cambio, instalar el cable entre la torre T y el pueblo A tiene un precio de 125 €/km. Determine a qué distancia del cruce O en la carretera principal hay que situar la torre T para que el precio del cableado sea mínimo y cuál será el valor de este precio mínimo. [2,5 puntos]



Llamamos “x” a la distancia de T a O e “y” a la distancia de T a B. Ponemos los datos proporcionados en el dibujo siguiente.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos x y 9 tenemos:

$$y^2 = 9^2 + x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 81}$$

El coste del cableado sería $f(x) = 125(12 - x) + 250y = 1500 - 125x + 250\sqrt{x^2 + 81}$. Siendo $0 \leq x \leq 12$.

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = 1500 - 125x + 250\sqrt{x^2 + 81} \Rightarrow f'(x) = -125 + 250 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 81}} = -125 + \frac{250x}{\sqrt{x^2 + 81}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -125 + \frac{250x}{\sqrt{x^2 + 81}} = 0 \Rightarrow \frac{250x}{\sqrt{x^2 + 81}} = 125 \Rightarrow 250x = 125\sqrt{x^2 + 81} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 81} \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 81 \Rightarrow 3x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{3} = 27 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{27} \approx 5.196}$$

Sustituimos $x = \sqrt{27}$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = -125 + \frac{250x}{\sqrt{x^2 + 81}} \Rightarrow f''(x) = \frac{250\sqrt{x^2 + 81} - 250x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 81}}}{(\sqrt{x^2 + 81})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 250 \frac{\sqrt{x^2 + 81} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 81}}}{x^2 + 81} \Rightarrow f''(\sqrt{27}) = 250 \frac{\sqrt{(\sqrt{27})^2 + 81} - \frac{(\sqrt{27})^2}{\sqrt{(\sqrt{27})^2 + 81}}}{(\sqrt{27})^2 + 81} =$$

$$= 250 \frac{\sqrt{27 + 81} - \frac{27}{\sqrt{27 + 81}}}{27 + 81} = \frac{\sqrt{108} - \frac{27}{\sqrt{108}}}{108} = \frac{\sqrt{3}}{24} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función coste tiene un mínimo para $x = \sqrt{27}$.
Para este valor el coste tiene un valor aproximado de

$$f(x) = 1500 - 125 \cdot \sqrt{27} + 250 \sqrt{(\sqrt{27})^2 + 81} \approx 3448.56 \text{ euros.}$$

Para que el coste de la instalación sea mínimo debe colocarse la torre a $\sqrt{27} \approx 5.2$ kilómetros del cruce, siendo este coste mínimo de 3448.56 euros.

5. Considere la familia S de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. [1,25 puntos]

b) Encuentre todas las matrices de la familia S, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquen la igualdad $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. [1,25 puntos]

a) Hallamos la inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz resultado del producto $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-3 & -2+6 \\ 6-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial $A^2 = I$.

$$\begin{aligned} A^2 = I &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + ba \\ ab + ba & b^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a = 0 \rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1} = \pm 1 \\ \text{Si } b = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Sea la función $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$.

a) Calcule los valores de los parámetros a y b si se sabe que la gráfica de la función f tiene un extremo relativo en $x = -1$ y pasa por el punto $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$. [1,25 puntos]

b) Para el caso $a = b$, calcule y clasifique los extremos relativos de la función. [1,25 puntos]

a) Si la función f tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces su derivada se anula para este valor.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2ax + 1)(x^2 + 1) - 2x(ax^2 + x + b)}{(x^2 + 1)^2} \\ f'(-1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2a(-1) + 1)((-1)^2 + 1) - 2(-1)(a(-1)^2 - 1 + b)}{((-1)^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(-2a + 1)2 + 2(a + b - 1)}{4} = 0 \Rightarrow (-2a + 1)2 + 2(a + b - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2a + a + b - 1 = 0 \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow \boxed{b = a}$$

La función queda $f(x) = \frac{ax^2 + x + a}{x^2 + 1}$. Como la gráfica pasa por el punto $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$ se debe

cumplir que $f(-2) = \frac{13}{5}$.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \frac{13}{5} \\ f(x) &= \frac{ax^2 + x + a}{x^2 + 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{a(-2)^2 - 2 + a}{(-2)^2 + 1} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{4a - 2 + a}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 5a - 2 \Rightarrow 15 = 5a \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Los valores buscados son $a = b = 3$.

b) Para el caso $a = b$ la función queda $f(x) = \frac{ax^2 + x + a}{x^2 + 1}$. Buscamos los valores que anulan su derivada.

$$f(x) = \frac{ax^2 + x + a}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2ax + 1)(x^2 + 1) - 2x(ax^2 + x + a)}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2ax^3} + \cancel{2ax} + x^2 + 1 - \cancel{2ax^3} - 2x^2 - \cancel{2ax}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos: $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 1}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-0^2 + 1}{(0^2 + 1)^2} = 1 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2^2 + 1}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, 1)$ por lo que la función tiene un mínimo relativo en $x = -1$.

La función crece en $(-1, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$ por lo que la función tiene un máximo relativo en $x = 1$.