



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso $a = 0$.

Ejercicio A2

Dada la recta que pasa por los puntos $A(0, 2, 3)$ y $B(-1, 1, 1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1, 0, 1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0, 4, 2)$.

Ejercicio A3

Sabemos que la recta $y = 2x - 10$ es tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1 \text{ en el punto } P(1, -8).$$

a) Calcula los valores de A y B .

b) Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y = -15x - 1$.

Ejercicio A4

Resolver la siguiente integral indefinida $\int (x+5)e^{3x} dx$

Ejercicio A5

La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

a) Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x = -3$.

Ejercicio B2

a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$$

y que pasa por el punto $P(2, 6, 5)$.

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

Ejercicio B3

Dada la función $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

- Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.
- ¿Para qué intervalos es creciente la función?
- Hallar todas las asíntotas de la función.

Ejercicio B4

Calcular el área del recinto limitado por las siguientes parábolas, realizando un dibujo del mismo.

$$y = -x^2 - 10x, \quad y = (x + 4)^2$$

Ejercicio B5

Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$.

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿es Z múltiplo de 10?

SOLUCIONES

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 6a^2 + 16 + \cancel{12a} - \cancel{12a} - 24 - 4a^2 = 2a^2 - 8$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -2$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad 6 \quad -4 \\ -2 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 12 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad 4 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 10 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 3^a - 6 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 60 \quad -20 \\ 0 \quad 0 \quad -60 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} & A/B \\ \hline -2 & 2 \quad 6 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad 10 \quad 2 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad -32 \\ \hline & A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.

El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} & A/B \\ \hline 2 & 2 \quad 6 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad -2 \quad 2 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline & A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = -2$ es incompatible (sin solución) y para $a = 2$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $a = 0$ estaríamos en el caso 1 estudiado en el apartado anterior y el sistema tiene solución. Lo resolvemos.

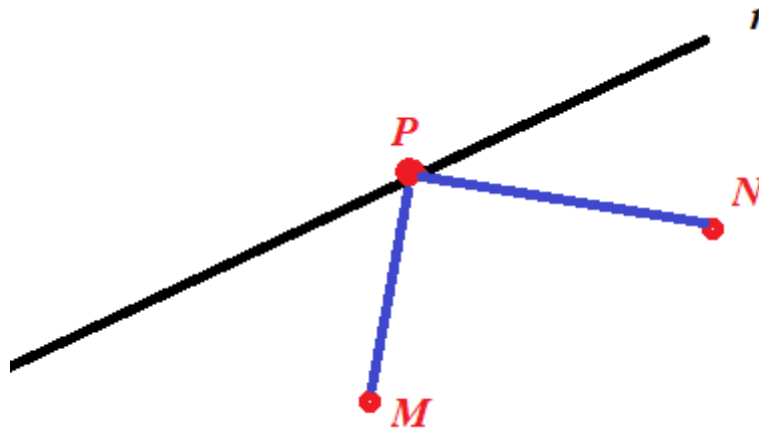
$$\left. \begin{array}{l} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2x + 6z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ x = 1 - 2z \\ x + 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ 1 - 2z + 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \\ x = 1 + 4 = 5 \end{array} \right.$$

La solución es $x = 5$, $y = 6$, $z = -2$.

Ejercicio A2

Dada la recta que pasa por los puntos $A(0,2,3)$ y $B(-1,1,1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1,0,1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0,4,2)$



Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A(0,2,3) \\ B(-1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-1,1,1) - (0,2,3) = (-1,-1,-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1,-1,-2) \\ A(0,2,3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Un punto P de la recta r tiene coordenadas $P(-t, 2-t, 3-2t)$.

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une.

$$\left. \begin{array}{l} M(1,0,1) \\ P(-t, 2-t, 3-2t) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (1,0,1) - (-t, 2-t, 3-2t) = (1+t, -2+t, -2+2t)$$

$$d(M, P) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(1+t)^2 + (-2+t)^2 + (-2+2t)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} N(0,4,2) \\ P(-t, 2-t, 3-2t) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PN} = (0,4,2) - (-t, 2-t, 3-2t) = (t, 2+t, -1+2t)$$

$$d(N, P) = |\overrightarrow{PN}| = \sqrt{t^2 + (2+t)^2 + (-1+2t)^2}$$

Hallamos el valor o valores de t que hacen que estas distancias sean iguales.

$$d(M, P) = d(N, P) \Rightarrow \sqrt{(1+t)^2 + (-2+t)^2 + (-2+2t)^2} = \sqrt{t^2 + (2+t)^2 + (-1+2t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+t)^2 + (-2+t)^2 + (-2+2t)^2 = t^2 + (2+t)^2 + (-1+2t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \cancel{t^2} + 2t + 4 + \cancel{t^2} - 4t + 4 + \cancel{4t^2} - 8t = \cancel{t^2} + 4 + \cancel{t^2} + 4t + 1 + \cancel{4t^2} - 4t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10t + 9 = 5 \Rightarrow 4 = 10t \Rightarrow \boxed{t = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}}$$

Hallamos las coordenadas del punto P de la recta que cumple lo pedido.

$$\left. \begin{array}{l} P(-t, 2-t, 3-2t) \\ t = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{-2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

Ejercicio A3

Sabemos que la recta $y = 2x - 10$ es tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1 \text{ en el punto } P(1, -8).$$

a) Calcula los valores de A y B.

b) Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y = -15x - 1$.

a) Si la recta es tangente a la función en el punto $P(1, -8)$ el valor de la función es -8 en $x = 1$

$\rightarrow f(1) = -8$. Además, la derivada de la función en $x = 1$ coincide con el valor de la pendiente de la recta $y = 2x - 10 \rightarrow f'(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -8 \\ f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -8 = 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 - 1 \Rightarrow \boxed{A + B = -8}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 2 \\ f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = 3 \cdot 1^2 + 2A \cdot 1 + B \Rightarrow \boxed{2A + B = -1}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} A + B = -8 \\ 2A + B = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} B = -8 - A \\ 2A + B = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2A - 8 - A = -1 \Rightarrow \boxed{A = 7} \Rightarrow \boxed{B = -8 - 7 = -15}$$

Los valores buscados son $A = 7$ y $B = -15$.

b) La función queda $f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1$. Hallamos los puntos de corte pedidos.

$$\left. \begin{array}{l} y = -15x - 1 \\ f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{-15x - 1} = x^3 + 7x^2 \cancel{-15x - 1} \Rightarrow x^3 + 7x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 - 1 = -1 \rightarrow A(0, -1) \\ x + 7 = 0 \rightarrow x = -7 \rightarrow y = -15(-7) - 1 = -106 \rightarrow B(-7, -106) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y = -15x - 1$ son $A(0, -1)$ y $B(-7, -106)$.

Ejercicio A4

Resolver la siguiente integral indefinida $\int (x+5)e^{3x} dx$

Aplicamos el método de integración por partes.

$$\int (x+5)e^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+5 = u \rightarrow dx = du \\ e^{3x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\} = (x+5)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} dx =$$

$$= \frac{x+5}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x+5}{3}e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}e^{3x} = \left(\frac{x+5}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3x} = \boxed{\left(\frac{3x+14}{9} \right) e^{3x} + K}$$

Ejercicio A5

La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

Los 45 números seguidos los llamamos $x, x+1, x+2, x+3, \dots, x+44$.

Nos dicen que suman 1890.

$$\begin{array}{r} \overbrace{2 \quad \quad \quad + \quad \quad 43}^{45} \\ \overbrace{1 \quad \quad \quad + \quad \quad 44}^{45} \end{array}$$

$$x + x+1 + x+2 + x+3 + \dots + x+44 = 1890 \Rightarrow 45x + (1+2+3+4+\dots+43+44) = 1890$$

$$\Rightarrow 45x + \frac{(44+1)44}{2} = 1890 \Rightarrow 45x + 990 = 1890 \Rightarrow 45x = 900 \Rightarrow x = \frac{900}{45} = 20$$

Por lo que el menor es 20 y el mayor $20 + 44 = 64$.

Ejercicio B1

a) Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x = -3$.

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 - x^2 - 0 - 0 - 1 = -x^2 + 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{5}}$$

Para que la matriz A tenga inversa debe ser $x \neq -\sqrt{5}$ y $x \neq +\sqrt{5}$.

b) Para $x = -3$ se cumple que es un valor distinto de $x \neq -\sqrt{5}$ y $x \neq +\sqrt{5}$ y por tanto existe la inversa. La calculamos.

Para $x = -3$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-3)^2 + 5 = -4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -6 & -18 & 10 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio B2

a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$$

y que pasa por el punto $P(2, 6, 5)$.

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

a) Si la recta es paralela a los planos su vector director debe ser perpendicular al vector normal de cada uno de los planos. Por lo que el producto vectorial de los vectores normales de los planos será un vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, -3, 1) \\ \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9i + 2j - k + 6k - 3j + i = -8i - j + 5k = (-8, -1, 5)$$

Hallamos la ecuación de la recta con vector director $\vec{v}_r = (-8, -1, 5)$ y que pasa por el punto $P(2, 6, 5)$. Esta es la recta pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-8, -1, 5) \\ P(2, 6, 5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 8t \\ y = 6 - t \\ z = 5 + 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

b) Como la recta r hallada es paralela al plano π_1 la distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta a dicho plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \\ P(2, 6, 5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi_1) = d(P, \pi_1) = \frac{|2 - 3 \cdot 6 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \approx 3.31u$$

Ejercicio B3

Dada la función $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

- Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.
- ¿Para qué intervalos es creciente la función?
- Hallar todas las asíntotas de la función.

a) Buscamos los puntos críticos de la función (candidatos a máximos o mínimos).

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 + 4)}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{8} = 2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después del punto crítico $x = 2$ y del valor excluido del dominio $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale $y' = \frac{(-1)^3 - 8}{(-1)^3} = 9 > 0$.

La función crece en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0, 2)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale $y' = \frac{1^3 - 8}{1^3} = -7 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ consideramos $x = 3$ y la derivada vale $y' = \frac{3^3 - 8}{3^3} = \frac{19}{27} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.

Como la función decrece antes de $x = 2$ y crece después la función tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $x = 0$ no pertenece al dominio de la función entonces no tiene máximo relativo.

b) Por lo visto en el apartado anterior la función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) **Asíntota vertical.** $x = a$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$. Comprobamos si la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \frac{0^3 + 4}{0^2} = \frac{4}{0} = \infty$$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} + \frac{4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{4}{x^2} = \infty + \frac{4}{\infty} = \infty + 0 = \infty$$

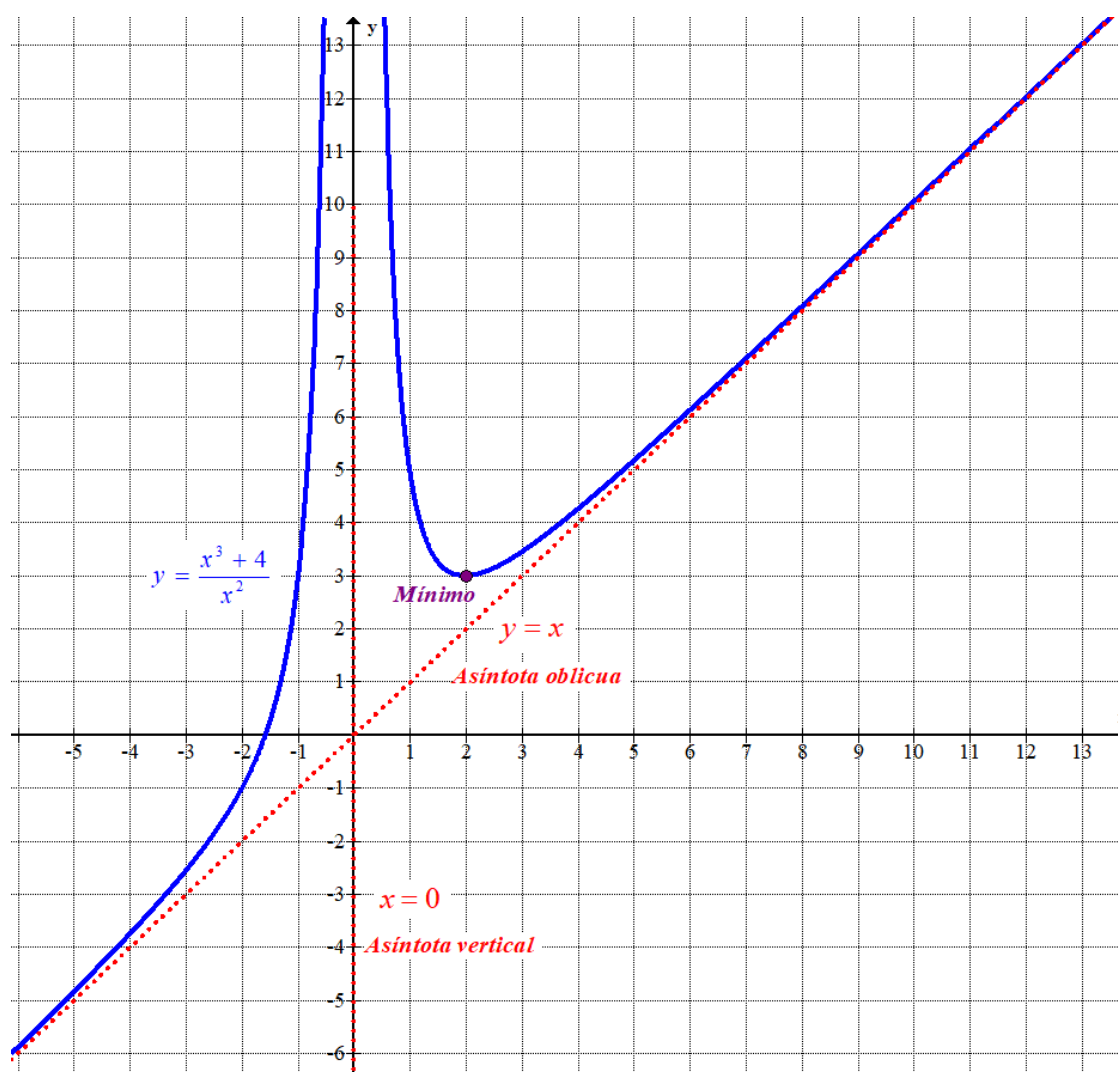
La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} + \frac{4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{4}{x^3} = 1 + \frac{4}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua de la función.



Ejercicio B4

Calcular el área del recinto limitado por las siguientes parábolas, realizando un dibujo del mismo.

$$y = -x^2 - 10x, \quad y = (x + 4)^2$$

Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 - 10x \\ y = (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = -x^2 - 10x \Rightarrow 2x^2 + 18x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 32}}{2} = \frac{-9 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-9+7}{2} = -1 = x \\ \frac{-9-7}{2} = -8 = x \end{cases}$$

Para dibujar la gráfica de las funciones entre -8 y -1 obtenemos una tabla de valores de cada una de ellas. También coloreamos la región delimitada por ambas gráficas.

x	$y = -x^2 - 10x$
-8	16
-6	24
-4	24
-1	9
0	0

x	$y = (x + 4)^2$
-8	16
-6	4
-4	0
-1	9
0	16



Calculamos el área de la región del plano limitado por las dos gráficas como la integral definida entre -8 y -1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-8}^{-1} -x^2 - 10x - (x^2 + 8x + 16) dx = \int_{-8}^{-1} -x^2 - 10x - x^2 - 8x - 16 dx = \\ &= \int_{-8}^{-1} -2x^2 - 18x - 16 dx = \left[\frac{-2x^3}{3} - 9x^2 - 16x \right]_{-8}^{-1} = \\ &= \left[\frac{-2(-1)^3}{3} - 9(-1)^2 - 16(-1) \right] - \left[\frac{-2(-8)^3}{3} - 9(-8)^2 - 16(-8) \right] = \\ &= \frac{2}{3} - 9 + 16 - \frac{1024}{3} + 576 - 128 = \boxed{\frac{343}{3} \approx 114.33 u^2} \end{aligned}$$

Ejercicio B5

Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$.

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿es Z múltiplo de 10?

Para que Z sea múltiplo de 10 debe de acabar en 0.

Buscamos una regularidad en la suma de las potencias sucesivas de 2, 5 y 6.

$$\begin{aligned} 2^1 + 5^1 + 6^1 &= 13 \\ 2^2 + 5^2 + 6^2 &= 65 \\ 2^3 + 5^3 + 6^3 &= 349 \\ 2^4 + 5^4 + 6^4 &= 1937 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^5 + 5^5 + 6^5 &= 10933 \\ 2^6 + 5^6 + 6^6 &= 62345 \\ 2^7 + 5^7 + 6^7 &= 358189 \\ 2^8 + 5^8 + 6^8 &= 2070497 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^9 + 5^9 + 6^9 &= 12031333 \\ &\dots \end{aligned}$$

Observamos que la última cifra de las potencias sucesivas va acabando en 3, 5, 9 o 7.

Por lo que $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ no acaba en 0 (acaba en 3).

$$\left. \begin{array}{r} 2017 \quad \overline{4} \\ 017 \quad 504 \\ \hline 001 \end{array} \right\} \Rightarrow N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017} = \dots\dots 3$$

Y por lo tanto $Z = N^{2017}$ tampoco va a acabar en 0, pues las potencias de un número que acaba en 3 acaban en 3, 9, 7 o 1, pero nunca en 0.

$$\left. \begin{array}{l} 3^1 = 3 \\ 3^2 = 9 \\ 3^3 = 27 \\ 3^4 = 81 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3^5 = 243 \\ 3^6 = 729 \\ 3^7 = 2187 \\ 3^8 = 6561 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3^9 = 19683 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\}$$