



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m . (NO es necesario resolverlo)

$$2x + y - z = 1$$

$$x + my + z = 2$$

$$3x + y - mz = 3$$

Ejercicio A2

Dado el punto $M(1, -3, 7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1, -3, 4)$ y $B(0, -4, 1)$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

- Calcula A , B , y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y que corta al eje OX en $x = 1$.
- Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

Ejercicio A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo $A(0,0)$, $B(0, 2)$, $C(4,2)$, $D(4, 0)$ en dos recintos.

- Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo $ABCD$.
- Calcula el área de cada uno de los recintos.

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m .

b) Hallar el valor m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio B2

Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto $A(14, 3, 3)$.

Ejercicio B3

Dada la función $y = \frac{x}{1-x^2}$

- ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?
- Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.
- Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abscisa es $x = 0$.

Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

SOLUCIONES

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m . (NO es necesario resolverlo)

$$2x + y - z = 1$$

$$x + my + z = 2$$

$$3x + y - mz = 3$$

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -m & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + 3 - 1 + 3m + m - 2 = -2m^2 + 4m$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + 4m = 0 \Rightarrow -2m(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \\ -3 \quad 0 \quad -3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B y menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad -2 \quad 3 \\ -3 \quad -6 \quad -3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -5 \quad -5 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ -2 \quad -4 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -15 \quad -15 \quad -9 \\ 0 \quad 15 \quad 15 \quad 15 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

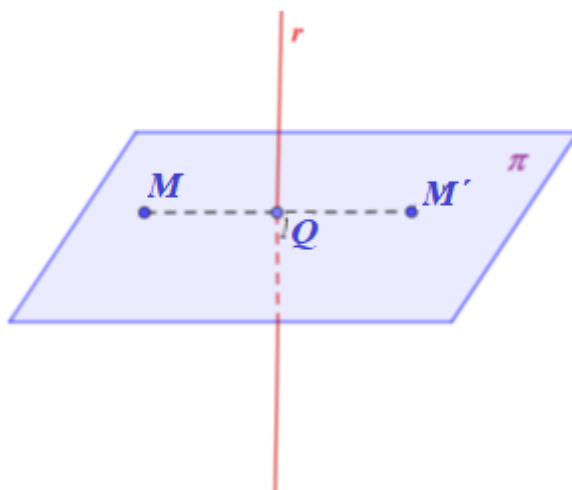
El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $m = 2$ es incompatible (sin solución) y para $m = 0$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Ejercicio A2

Dado el punto $M(1, -3, 7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1, -3, 4)$ y $B(0, -4, 1)$.

Vamos a determinar las coordenadas del punto M' simétrico de M respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(1, -3, 4)$ y $B(0, -4, 1)$ calculando previamente el plano π perpendicular a la recta que pasa por M , después el punto Q de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto M' sumándole al punto Q el vector $\overrightarrow{MQ}$ ya que Q es el punto medio del segmento $\overline{MM'}$.



Hallamos la ecuación del plano π . Su vector normal es el vector director de la recta $\overline{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -3, 4) \\ B(0, -4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \overline{AB} = (0, -4, 1) - (1, -3, 4) = (-1, -1, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, -1, -3) \\ M(1, -3, 7) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x - y - 3z + D = 0 \\ M(1, -3, 7) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 3 - 21 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 19 \Rightarrow \pi \equiv -x - y - 3z + 19 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + 3z - 19 = 0}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overline{AB} = (-1, -1, -3) \\ B(0, -4, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -4 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + 3z - 19 = 0 \\ r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -\lambda - 4 - \lambda + 3 - 9\lambda - 19 = 0 \Rightarrow -11\lambda - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = -20 \Rightarrow \lambda = \frac{-20}{11} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{11} \\ y = -4 + \frac{20}{11} = \frac{-24}{11} \\ z = 1 - 3\frac{-20}{11} = \frac{71}{11} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right)$$

Hallamos las coordenadas del punto M' .

$$\overrightarrow{MQ} = \left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right) - (1, -3, 7) = \left(\frac{9}{11}, \frac{9}{11}, \frac{-6}{11}\right)$$

$$M' = Q + \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{20}{11}, \frac{-24}{11}, \frac{71}{11}\right) + \left(\frac{9}{11}, \frac{9}{11}, \frac{-6}{11}\right) = \left(\frac{29}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{65}{11}\right)$$

El punto M' simétrico de M respecto de la recta r tiene coordenadas $M'\left(\frac{29}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{65}{11}\right)$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

- a) Calcula A, B, y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y que corta al eje OX en $x = 1$.
- b) Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

- a) Si la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal significa que la pendiente de la recta vale 0 y por tanto la derivada de la función en $x = 0$ vale 0 $\Rightarrow f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx + C \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 4 \cdot 0^3 + 3A \cdot 0^2 + 2B \cdot 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

La función queda $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 7$.

La función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$.

La función corta al eje OX en $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 4 \cdot 2^3 + 3A \cdot 2^2 + 2B \cdot 2 \Rightarrow 0 = 32 + 12A + 4B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 8 + 3A + B \Rightarrow \boxed{3A + B = -8}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1^4 + A \cdot 1^3 + B \cdot 1^2 + 7 \Rightarrow 0 = 1 + A + B + 7 \Rightarrow \boxed{A + B = -8}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 3A + B = -8 \\ A + B = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3A + B = -8 \\ B = -8 - A \end{array} \right\} \Rightarrow 3A - 8 - A = -8 \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0} \Rightarrow \boxed{B = -8 + 0 = -8}$$

Los valores buscados son $A = 0$ y $B = -8$.

- b) Para los valores obtenidos la función queda $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^4 - 8x^2 + 7 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \end{array} \right.$$

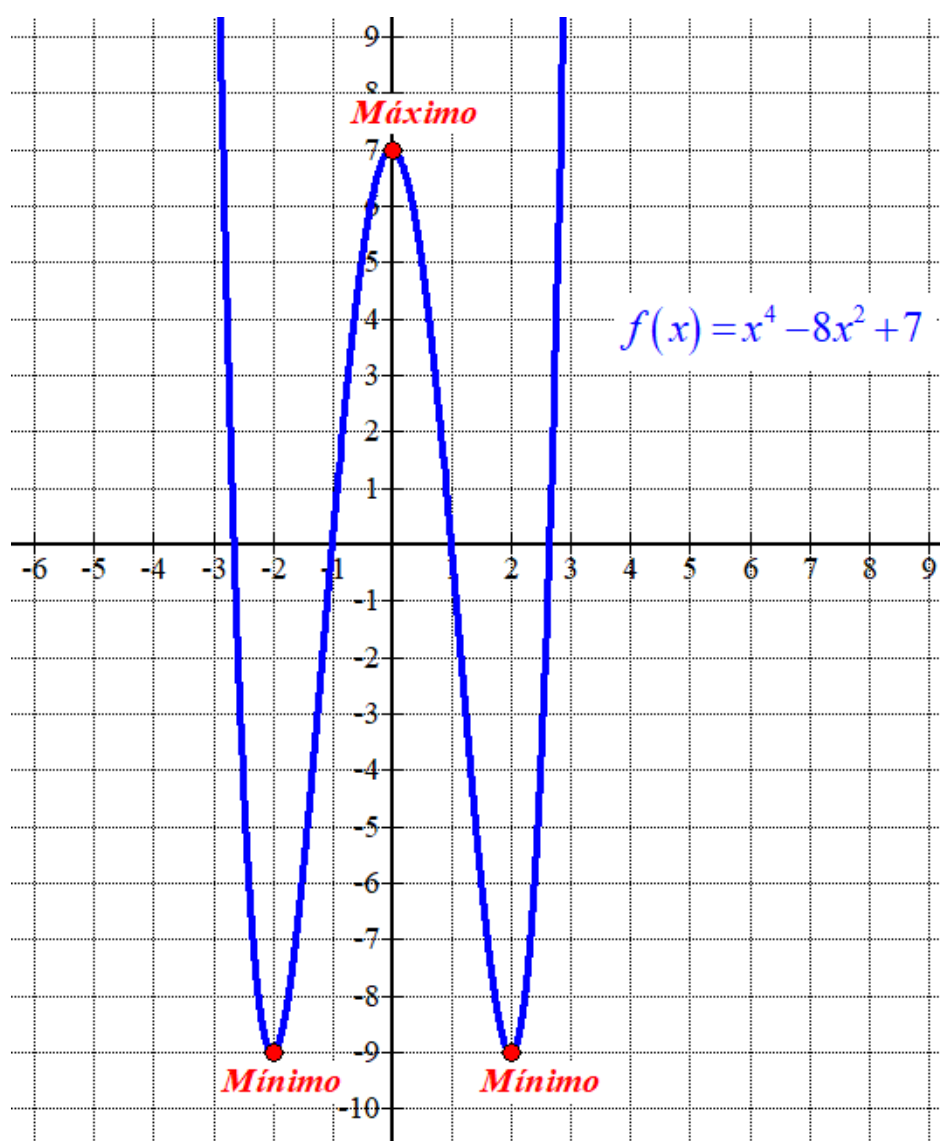
Sustituimos estos valores obtenidos en la segunda derivada.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 16 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0 \\ f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 16 = -16 < 0 \\ f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 16 = 32 > 0 \end{cases}$$

La función presenta dos mínimos relativos: uno en $x = -2$ y otro en $x = 2$ y un máximo relativo en $x = 0$.

$$f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 7 = -9 \quad f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 7 = -9 \quad f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 7 = 7$$

Los mínimos relativos tienen coordenadas $(-2, -9)$ y $(2, -9)$. El máximo relativo tiene coordenadas $(0, 7)$.



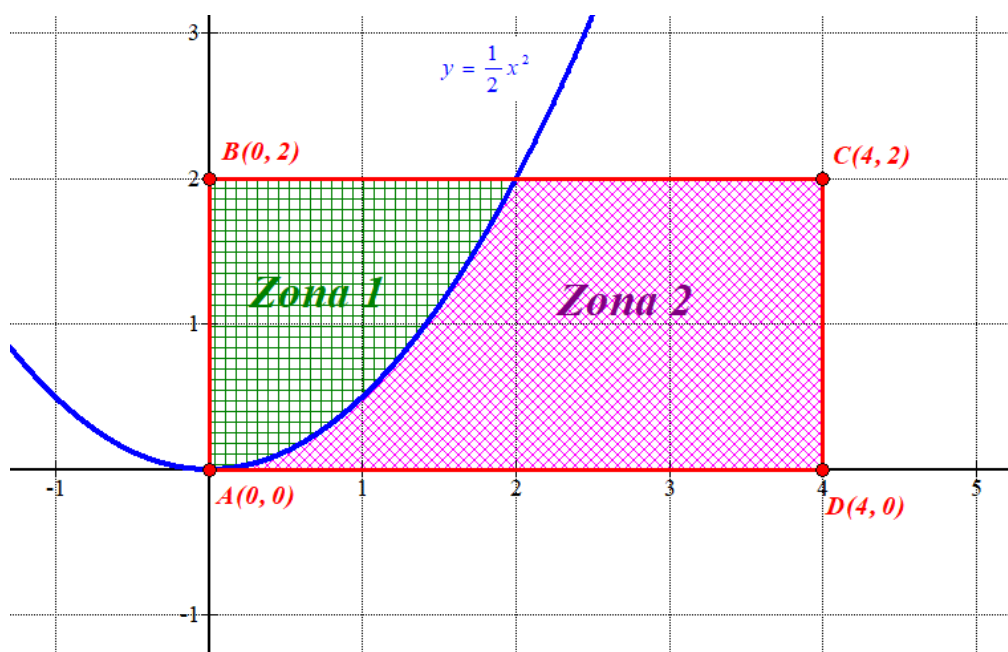
Ejercicio A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo A(0,0), B(0, 2), C(4,2) , D(4, 0) en dos recintos.

- a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo ABCD.
b) Calcula el área de cada uno de los recintos.

a) Dibujamos el rectángulo ABCD y la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$. Coloreamos de un color diferente cada uno de los trozos en que la parábola divide al rectángulo.

x	$y = \frac{1}{2}x^2$
-2	2
0	0
2	2



El área de la zona 1 es el valor de la integral definida de 0 a 2 de la diferencia entre la recta horizontal $y = 2$ y la curva $y = \frac{1}{2}x^2$.

$$\text{Área 1} = \int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 dx = \left[2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[2 \cdot 2 - \frac{2^3}{6} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{0^3}{6} \right] = 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3} \approx 2.667 u^2$$

El área de la zona 2 es la diferencia entre el área del rectángulo y el área de la zona 1.

$$\text{Área rectángulo} = 4 \cdot 2 = 8 u^2$$

$$\text{Área 2} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5.333 u^2$$

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de alguna regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^4 = A^3 A = -AA = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Como $A^4 = Id$ dividimos 2017 entre 4.

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 4 \\ -20 & 504 \\ \hline & 17 \\ -16 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Por lo que $2017 = 504 \cdot 4 + 1$. Calculamos A^{2017} .

$$A^{2017} = A^{504 \cdot 4 + 1} = (A^4)^{504} \cdot A^1 = (Id)^{504} \cdot A = Id \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio B1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m .

b) Hallar el valor m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

Si $m \neq 0$ el determinante de A es no nulo, existe la inversa de A y su rango es 3.

Si $m = 0$ el determinante de A es nulo y no existe la inversa de A .

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que tiene dos columnas nulas, por lo que el rango de A es 1.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \rightarrow m = \sqrt{4} = \pm 2 \\ -2m+4 = 0 \rightarrow m = 2 \\ -2+m = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

El único valor para el que se cumple lo pedido es $m = 2$.

Ejercicio B2

Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto $A(14, 3, 3)$.

Necesitamos encontrar el punto B de la recta r tal que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a la recta, es decir, tal que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}_r$ sea cero.

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, -2, 3) \\ P_r(0, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Un punto B de la recta r tiene coordenadas $B(2\lambda, 3 - 2\lambda, 1 + 3\lambda)$.

Hallamos el valor de λ que hace que se cumpla $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_r = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A(14, 3, 3) \\ B(2\lambda, 3 - 2\lambda, 1 + 3\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2\lambda, 3 - 2\lambda, 1 + 3\lambda) - (14, 3, 3) = (2\lambda - 14, -2\lambda, 3\lambda - 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -2, 3) \\ \overrightarrow{AB} = (2\lambda - 14, -2\lambda, 3\lambda - 2) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2\lambda - 14, -2\lambda, 3\lambda - 2)(2, -2, 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda - 28 + 4\lambda + 9\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 17\lambda - 34 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

Para $\lambda = 2$ el punto es $B(4, -1, 7)$.

La recta pedida será la recta s que pasa por los puntos A y B. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} B(4, -1, 7) \in s \\ A(14, 3, 3) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_s = \overrightarrow{AB} = (14, 3, 3) - (4, -1, 7) = (10, 4, -4)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(14, 3, 3) \in s \\ \vec{u}_s = (10, 4, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s: \frac{x-14}{10} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-4}}$$

La ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que

pasa por el punto $A(14, 3, 3)$ es $s: \frac{x-14}{10} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-4}$.

Ejercicio B3

Dada la función $y = \frac{x}{1-x^2}$

- ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?
- Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.
- Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abscisa es $x = 0$.

- a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función haciendo uso de la derivada.

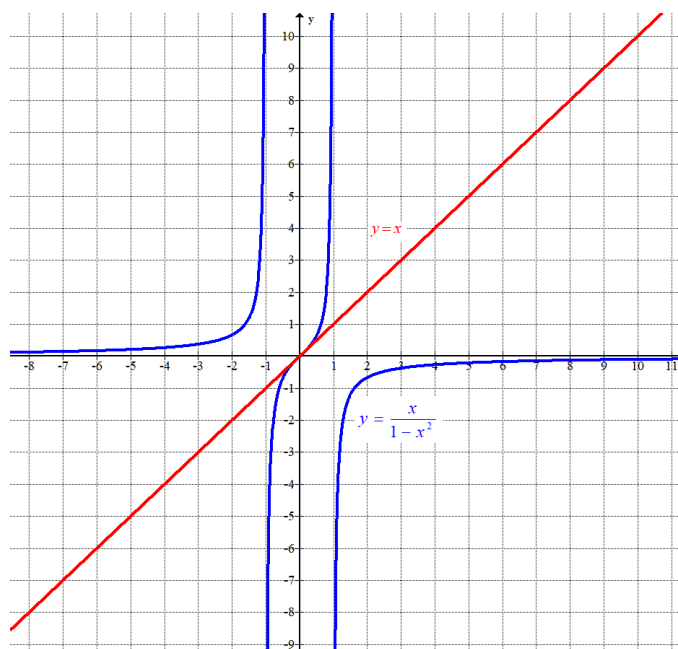
$$y = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot (1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva. La función es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- b) La función no tiene máximos ni mínimos pues siempre es creciente.

- c) La ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(0) = f'(0)(x - 0) \\ f(0) = \frac{0}{1-0^2} = 0 \\ f'(0) = \frac{1+0^2}{(1-0^2)^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$



Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} dx$

Utilizamos el método de integración por descomposición en fracciones simples.

Descomponemos la fracción $\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}$ en suma de fracciones más sencillas.

$$x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2+5}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{x^2+5}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 5 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{5=A} \\ x=1 \rightarrow \boxed{6=C} \\ x=2 \rightarrow 9 = A + 2B + 2C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 5 + 2B + 12 \Rightarrow 9 - 17 = 2B \Rightarrow \boxed{B = \frac{-8}{2} = -4}$$

Hemos obtenido que $\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{5}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2}$.

Utilizamos la descomposición obtenida para calcular la integral.

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} dx = \int \frac{5}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2} dx = \int \frac{5}{x} dx - \int \frac{4}{x-1} dx + \int \frac{6}{(x-1)^2} dx =$$

$$= 5 \int \frac{1}{x} dx - 4 \int \frac{1}{x-1} dx + 6 \int (x-1)^{-2} dx = 5 \ln x - 4 \ln(x-1) + 6 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} =$$

$$= \boxed{5 \ln x - 4 \ln(x-1) - \frac{6}{x-1} + K}$$

Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Llamamos “x” al número de viajeros que pagan el billete entero, “y” al número de viajeros que pagan el 80% y “z” al número de viajeros que pagan el 50%.

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos $\rightarrow x + y + z = 60$.

Hay “x” viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de “y” viajeros abona el 80% ($0.8 \cdot 1.2 = 0.96$ €) y un tercer grupo de “z” viajeros abona el 50% ($0.5 \cdot 1.2 = 0.6$ €). La recaudación del autobús fue de 46,56 € $\rightarrow 1.2x + 0.96y + 0.6z = 46.56$.

El número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros $\rightarrow z = 2(x + y)$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 1.2x + 0.96y + 0.6z = 46.56 \\ z = 2(x + y) = 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2x + 2y = 60 \\ 1.2x + 0.96y + 0.6(2x + 2y) = 46.56 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y = 60 \\ 1.2x + 0.96y + 1.2x + 1.2y = 46.56 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ 2.4x + 2.16y = 46.56 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20 - x \\ 2.4x + 2.16y = 46.56 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.4x + 2.16(20 - x) = 46.56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4x + 43.2 - 2.16x = 46.56 \Rightarrow 0.24x = 3.36 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3.36}{0.24} = 14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 20 - 14 = 6} \Rightarrow \boxed{z = 28 + 12 = 40}$$

De los 60 viajeros 14 pagan el billete entero, 6 pagan el 80% y los 40 restantes pagan el 50%.