



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Determinar el rango de la matriz $A(a)$ según los valores de a .

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio A2

Sea π el plano de ecuación $x+y+z=1$, sea r la recta de ecuaciones paramétricas $\{x=1, y=t, z=t\}$ y sea P el punto $(1,1,0)$.

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a r y que contenga a P .

b) Hallar el punto simétrico de P respecto al plano π .

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 e^{-3x} dx$$

Ejercicio A5

Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

a) Discutir el siguiente sistema $S(a)$ en función de a

$$S(a) = \begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a-1 \end{cases}$$

b) ¿Hay solución para $a=1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

Ejercicio B2

Determinar el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\{x = -1 + t, y = 3 + 2t, z = -1 + 2t\}.$$

Ejercicio B3

De la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$ y que tiene un extremo en $x = 0$ de valor 1.

a) Hallar A , B y C .

b) ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ es máximo o es mínimo?

Ejercicio B4

La curva $y = 4x^2$ y la curva $y = 4x - x^2$ delimitan un recinto finito del plano.

Dibujar dicho recinto y calcular su área.

Ejercicio B5

Hallar razonadamente el último dígito del número $P = (2018)^{2018} (3)^{2018}$

SOLUCIONES

Ejercicio A1

Determinar el rango de la matriz $A(a)$ según los valores de a .

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $A(a)$ es de dimensiones 3×4 , por lo que su rango puede ser como máximo 3 y como mínimo 1 pues tiene un elemento no nulo.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera y segunda columnas su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$$

El rango de la matriz $A(a)$ es 2 o 3.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera columna y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + a^2 - 0 - 0 - 2a = a^2 - 2a$$

$$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es no nulo y por tanto el rango de la matriz $A(a)$ es 3.

CASO 2. $a = 0$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo.

La matriz queda $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que las columnas primera y segunda

son iguales. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 4 = -4 \neq 0$$

Al ser no nulo el determinante del menor de orden 3 elegido el rango de $A(0)$ es 3.

CASO 3. $a = 2$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo.

La matriz queda $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que las columnas primera y cuarta son

iguales. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 0 - 0 - 0 - 4 = 8 \neq 0$$

Al ser no nulo el determinante del menor de orden 3 elegido el rango de $A(2)$ es 3.

Conclusión: El rango de la matriz $A(a)$ es 3 para cualquier valor de a .

Ejercicio A2

Sea π el plano de ecuación $x + y + z = 1$, sea r la recta de ecuaciones paramétricas

$\{x = 1, y = t, z = t\}$ y sea P el punto $(1, 1, 0)$.

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a r y que contenga a P .

b) Hallar el punto simétrico de P respecto al plano π .

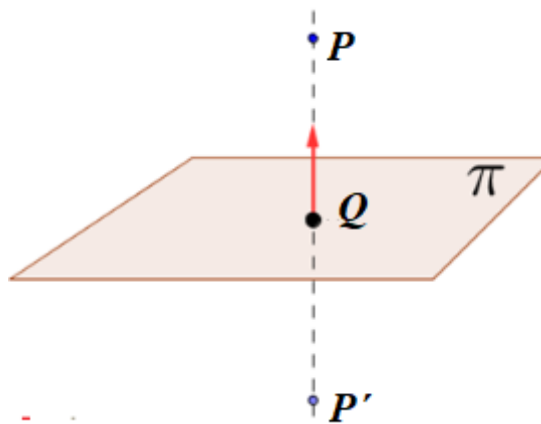
a) El plano π' perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}' = \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \in \pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \pi': y + z + D = 0 \\ P(1, 1, 0) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi': y + z - 1 = 0}$$

La ecuación del plano π' perpendicular a r y que contiene a P es $\pi': y + z - 1 = 0$.

b) Para obtener el punto P' simétrico de P respecto al plano π determinamos la recta que pasa por P y es perpendicular al plano. Luego determinamos el punto Q de corte de recta y plano y por último hallamos P' sumando a Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.



Hallo la ecuación de la recta. Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} P(1, 1, 0) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (1, 1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto Q de corte de la recta s y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$s \equiv \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 1 \\ \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 1 + \lambda + \lambda = 1 \Rightarrow 3\lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ y = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = \frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico P' las hallamos sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 1, 0) \\ Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) - (1, 1, 0) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es $P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

El dominio de la función $f(x) = x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$ es $\mathbb{R}$, pues el denominador no se puede anular.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene pues el dominio de la función son todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = (-\infty)^2 e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $+\infty$ no tiene pues existe una asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $-\infty$ lo comprobamos.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = (-\infty) e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Conclusión: La función solo tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$: $y = 0$.

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

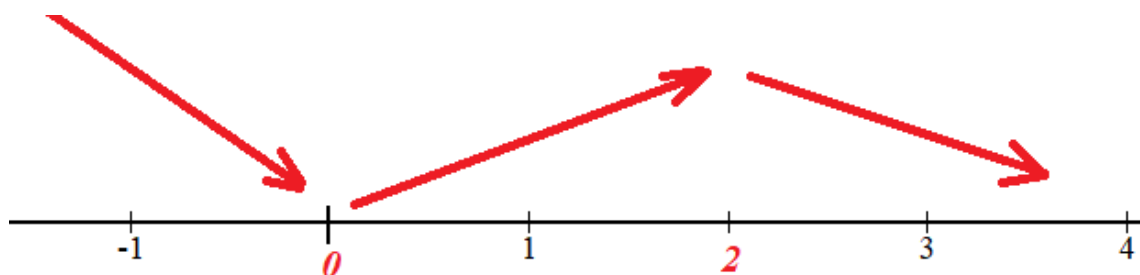
$$f(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 (-1) e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x - x^2) e^{-x} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos de la función. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = (2(-1) - (-1)^2)e^1 = -3e < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = (2 - 1^2)e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ consideramos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = (2 \cdot 3 - 3^2)e^{-3} = \frac{-3}{e^3} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

$$f(0) = 0^2 e^{-0} = 0$$

$$f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

El mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$ y el máximo relativo es el punto $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 e^{-3x} dx$$

Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$\int x^2 e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-3x} dx \rightarrow v = \int e^{-3x} dx = \frac{-1}{3} e^{-3x} \end{array} \right\} =$$

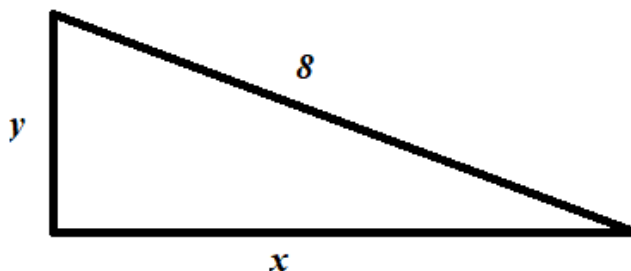
$$= x^2 \left(\frac{-1}{3} e^{-3x} \right) - \int \frac{-1}{3} e^{-3x} 2x dx = \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-3x} dx \rightarrow v = \frac{-1}{3} e^{-3x} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \left[x \left(\frac{-1}{3} e^{-3x} \right) - \int \frac{-1}{3} e^{-3x} dx \right] = \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \left[\frac{-x}{3e^{3x}} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx \right] =$$

$$= \frac{-x^2}{3e^{3x}} + \frac{2}{3} \left[\frac{-x}{3e^{3x}} + \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{3} e^{-3x} \right) \right] = \boxed{\frac{-x^2}{3e^{3x}} - \frac{2x}{9e^{3x}} - \frac{2}{27e^{3x}} + C}$$

Ejercicio A5

Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.



Aplicando el teorema de Pitágoras se cumple que $x^2 + y^2 = 8^2 \Rightarrow y^2 = 64 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$, siendo $0 < x < 8$.

El área del triángulo rectángulo es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = \frac{xy}{2} \\ y = \sqrt{64 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{64 - x^2}}{2}$$

Derivamos esta función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$A(x) = \frac{x\sqrt{64 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2(64 - x^2)}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{64x^2 - x^4} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2} \frac{128x - 4x^3}{2\sqrt{64x^2 - x^4}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{128x - 4x^3}{4\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 128x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 32x - x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(32 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 32 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} \approx 5.66 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = \sqrt{32}$.

- En el intervalo $(0, \sqrt{32})$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale

$$A'(1) = \frac{128 - 4}{4\sqrt{64 - 1^4}} = \frac{124}{4\sqrt{63}} > 0. \text{ La función crece en } (0, \sqrt{32}).$$

- En el intervalo $(\sqrt{32}, 8)$ consideramos $x = 6$ y la derivada vale

$$A'(6) = \frac{128 \cdot 6 - 4 \cdot 6^3}{4\sqrt{64 \cdot 6^2 - 6^4}} = \frac{-2\sqrt{7}}{7} < 0. \text{ La función decrece en } (\sqrt{32}, 8).$$

Como la función crece antes y decrece después existe un máximo relativo en $x = \sqrt{32}$.

$$\text{El valor del área máxima es } A(\sqrt{32}) = \frac{\sqrt{32}\sqrt{64 - (\sqrt{32})^2}}{2} = 16 \text{ u}^2.$$

Ejercicio B1

a) Discutir el siguiente sistema $S(a)$ en función de a

$$S(a) = \begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a-1 \end{cases}$$

b) ¿Hay solución para $a=1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3a^2 - 2(a+1) + 3 + 2a - a(a+1) =$$

$$= -1 + 3a^2 - \cancel{2a} - 2 + 3 + \cancel{2a} - a^2 - a = 2a^2 - a$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - a = 0 \Rightarrow a(2a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a-1 = 0 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ -3 \quad 0 \quad 3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad -7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad -4 \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad -1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad -4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -3}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.

El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = \frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 3 & 3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 3/2 \quad -1 \quad -1/2 \\ -3 \quad -3/2 \quad 3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad -13/2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1/2 \quad 0 \\ -2 \quad -1 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 5/2 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -13/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 10 \quad -65/2 \\ 0 \quad 0 \quad -10 \quad 16 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -33/2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1/2 \quad -1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 5/2 \quad -4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -33/2}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.

El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $a=1$ y $a \neq \frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado (una única solución),

para $a=0$ y $a = \frac{1}{2}$ es incompatible (sin solución).

b) Para $a=1$ estaríamos en el caso 1 estudiado en el apartado anterior y el sistema tiene solución. Resolvemos el sistema.

$$S(1) = \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ z = -2x - y \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2x + y = 2 \\ 3x + 2y + 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ y = \frac{-5x}{3} \end{cases} \Rightarrow 3x - 2\frac{5x}{3} = 2 \Rightarrow 3x - \frac{10x}{3} = 2 \Rightarrow 9x - 10x = 6 \Rightarrow$$

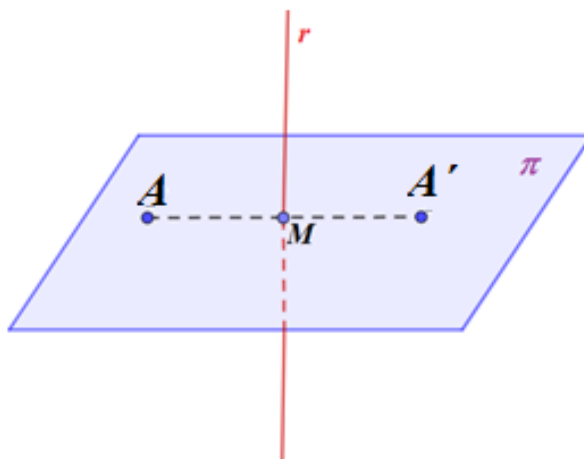
$$\Rightarrow -x = 6 \Rightarrow \boxed{x = -6} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-5(-6)}{3} = 10} \Rightarrow \boxed{z = -2(-6) - 10 = 2}$$

La solución es $x = -6$, $y = 10$, $z = 2$.

Ejercicio B2

Determinar el punto simétrico de $A(-3,1,-7)$ respecto a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x = -1+t, y = 3+2t, z = -1+2t\}$.

Vamos a determinar las coordenadas del punto A' simétrico de A respecto de la recta r calculando previamente el plano π perpendicular a la recta, después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto A' sumándole al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$ ya que M es el punto medio del segmento AA' .



Hallamos la ecuación del plano π . Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r: \{x = -1+t, y = 3+2t, z = -1+2t\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+2t \\ z = -1+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 2) \\ Q_r(-1, 3, -1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} = \vec{u}_r = (1, 2, 2) \\ A(-3, 1, -7) \in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(-3, 1, -7) \in \pi \end{cases} \Rightarrow -3 + 2 - 14 + D = 0 \Rightarrow D = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{aligned} \pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0 \\ r: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+2t \\ z = -1+2t \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1+t + 2(3+2t) + 2(-1+2t) + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+t + 6 + 4t - 2 + 4t + 15 = 0 \Rightarrow 9t + 18 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2 = -3 \\ y = 3 - 4 = -1 \\ z = -1 - 4 = -5 \end{cases} \Rightarrow M(-3, -1, -5)$$

Hallamos las coordenadas del punto A'.

$$\overrightarrow{AM} = (-3, -1, -5) - (-3, 1, -7) = (0, -2, 2)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (-3, -1, -5) + (0, -2, 2) = (-3, -3, -3)$$

El punto simétrico de A respecto de la recta r tiene coordenadas A' $(-3, -3, -3)$.

Ejercicio B3

De la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$ y que tiene un extremo en $x = 0$ de valor 1.

a) Hallar A, B y C.

b) ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ es máximo o es mínimo?

a) Si la gráfica pasa por el punto $(1, 0)$ se cumple que $f(1) = 0$. Como tiene un extremo en $x = 0$ de valor 1 se cumple que $f(0) = 1$ y que $f'(0) = 0$. Utilizamos toda esta información para obtener la expresión de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \\ f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \\ f(1) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C \\ 1 = 0^3 + A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C \\ 0 = 3 \cdot 0^2 + 2A \cdot 0 + B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + A + B + C \\ 1 = C \\ 0 = B \end{cases} \Rightarrow 0 = 1 + A + 0 + 1 \Rightarrow \boxed{A = -2}$$

Los valores buscados son $A = -2$, $B = 0$ y $C = 1$.

b) La función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 4x$ y la derivada segunda es $f''(x) = 6x - 4$. Sustituimos $x = 0$ en la segunda derivada y obtenemos su signo: $f''(0) = 6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$. Al ser negativo el valor de la segunda derivada la función presenta un máximo relativo en $x = 0$.

Ejercicio B4

La curva $y = 4x^2$ y la curva $y = 4x - x^2$ delimitan un recinto finito del plano.

Dibujar dicho recinto y calcular su área.

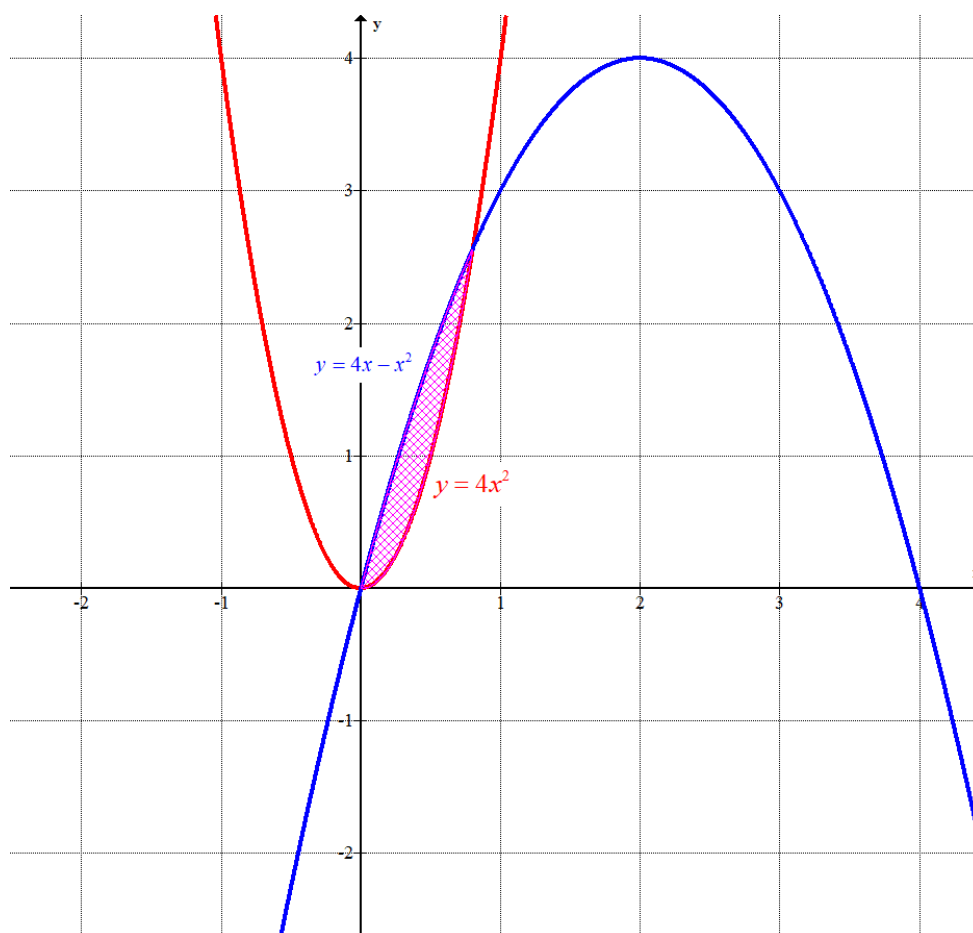
Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x^2 \\ y = 4x - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow 5x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(5x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \rightarrow 5x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{5} = 0.8 \end{cases}$$

Obtenemos una tabla de valores de cada función y dibujamos la gráfica de ambas funciones.

x	$y = 4x^2$	x	$y = 4x - x^2$
-1	4	-1	-5
0	0	0	0
0.8	2.56	0.8	2.56
1	4	1	3



Como se puede observar en el dibujo el valor del área del recinto limitado por las gráficas va a tener un valor pequeño, va a ser menor de 1 unidad cuadrada (1 cuadradito del dibujo). Calculamos su valor exacto como la integral definida entre 0 y 0.8 de la diferencia de las funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{0.8} 4x - x^2 - 4x^2 dx = \int_0^{0.8} 4x - 5x^2 dx = \left[2x^2 - \frac{5x^3}{3} \right]_0^{0.8} = \\ &= \left[2 \cdot 0.8^2 - \frac{5 \cdot 0.8^3}{3} \right] - \left[2 \cdot 0^2 - \frac{5 \cdot 0^3}{3} \right] = \boxed{\frac{32}{75} \approx 0.4267 u^2} \end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de 0.4267 unidades cuadradas.

Ejercicio B5

Hallar razonadamente el último dígito del número $P = (2018)^{2018} (3)^{2018}$

Las potencias tienen el mismo exponente por lo que podemos expresar este producto como $P = (2018)^{2018} (3)^{2018} = 6054^{2018}$.

La última cifra de esta potencia es la última cifra de la potencia 4^{2018} . Obtenemos la expresión de las potencias sucesivas de 4 buscando una regularidad en ellas.

$$4^1 = 4$$

$$4^2 = 16$$

$$4^3 = 64$$

$$4^4 = 256$$

$$4^5 = 1024$$

$$4^6 = 4096$$

$$4^7 = 16384$$

$$4^8 = 65536$$

Observamos que las potencias de exponente impar acaban 4 y las potencias de exponente par acaban en 6, por lo que 4^{2018} acaba en 6 (2018 es par).

Podemos afirmar que la última cifra de $P = (2018)^{2018} (3)^{2018}$ es 6.