



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2018ko EKAINA

JUNIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio A2

Dados los puntos $A(3, 3, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 0, 4)$ y $D(3, 0, 1)$.

- ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.
- Calcular a para que el punto $P(a, a, 8)$ esté en la recta que pasa por los puntos A y C .

Ejercicio A3

Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{ax}, & x > 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a .

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx$$

Ejercicio A5

De todos los números positivos x e y tales que $x + y = 10$ encontrar aquellos para los que el producto $P = x^2y$ sea máximo.



UNIBERTSITATERA
SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

2018ko EKAINA

JUNIO 2018

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $S(a)$

$$S(a) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

- Discutirlo según los distintos valores de a .
- ¿Hay solución para $a = 2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

Ejercicio B2

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y a la recta

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$, se pide:

- Hallar las asíntotas de f .
- Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.
- ¿Tiene extremos la función f ? En caso afirmativo ¿en qué puntos?

Ejercicio B4

Representar el recinto del plano limitado por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y por la recta $x = 1$. Calcular su área.

Ejercicio B5

Si llamamos P a la suma de todos los números pares menores que 1001 y T a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1001, ¿cuánto vale $P - T$?

SOLUCIONES

Ejercicio A1

Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz A es de dimensiones 3×4 , por lo que su rango puede ser como máximo 3 y como mínimo 1 pues tiene un elemento no nulo.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la primera y segunda columnas su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8 \neq 0$$

El rango de la matriz A es 2 o 3.

Observamos que la primera y la cuarta columna son proporcionales, por lo que el único menor que puede tener determinante no nulo es el que se obtiene quitando la cuarta columna.

Averiguamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 0 + 0 + 4a - 0 - 12 = a^2 + 4a - 12$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-12)}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-4+8}{2} = \boxed{2=a} \\ \frac{-4-8}{2} = \boxed{-6=a} \end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq -6$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es no nulo y por tanto el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $a = 2$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo. Como la cuarta columna es proporcional a la primera no existe ningún menor de orden 3 con determinante no nulo. El rango de A es 2.

CASO 3. $a = -6$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 elegido es nulo. Como la cuarta columna es proporcional a la primera no existe ningún menor de orden 3 con determinante no nulo. El rango de A es 2.

Conclusión: Para $a \neq 2$ y $a \neq -6$ el rango de la matriz A es 3 y para $a = 2$ o $a = -6$ el rango de A es 2.

Ejercicio A2

Dados los puntos $A(3, 3, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 0, 4)$ y $D(3, 0, 1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

b) Calcular a para que el punto $P(a, a, 8)$ esté en la recta que pasa por los puntos A y C .

a) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(3,3,3) \\ B(2,3,4) \\ C(0,0,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,3,4) - (3,3,3) = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,4) - (3,3,3) = (-3,-3,1) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-3,-3,1) \\ C(0,0,4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3y + 3(z-4) - 0 + y + 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 3z - 12 + y + 3x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 2y + 3z - 12 = 0}$$

Averiguamos si el punto D pertenece al plano definido por los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 3x - 2y + 3z - 12 = 0 \\ \text{¿} D(3,0,1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 12 = 0? \Rightarrow \text{¿} 9 + 3 - 12 = 0? \Rightarrow \text{¡¡¡SI!!!!}$$

Los cuatro puntos son coplanarios y la ecuación del plano π que los contiene es $\pi: 3x - 2y + 3z - 12 = 0$.

b) Hallamos la recta r que pasa por los puntos A y C .

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AC} = (-3,-3,1) \\ C(0,0,4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Hacemos que el punto $P(a, a, 8)$ cumpla las ecuaciones de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = -3t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \\ P(a,a,8) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -3t \\ a = -3t \\ 8 = 4 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3t \\ a = -3t \\ 4 = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -12 \\ a = -12 \end{cases}}$$

Para que el punto P pertenezca a la recta que pasa por los puntos A y C debe ser $a = -12$.

Ejercicio A3

Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{ax}, & x > 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a .

La función en el intervalo $(-\infty, 1)$ tiene la expresión $f(x) = 3 - ax^2$ que es una expresión polinómica y continua.

La función en el intervalo $(1, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{2}{ax}$ que es una expresión racional cuyo denominador se anula en $x = 0 \notin (1, +\infty)$, por lo que es continua en $(1, +\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 3 - a \cdot 1^2 = 3 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 - ax^2 = 3 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{ax} = \frac{2}{a} \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 - a = \frac{2}{a} \Rightarrow 3a - a^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=a} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=a} \end{cases}$$

Para que la función sea continua debe ser $a = 2$ o $a = 1$. Para cualquier otro valor la función no es continua.

Para $a = 2$ o $a = 1$ estudiamos la derivabilidad de la función.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ y su derivada es $f'(x) = \begin{cases} -2ax, & x < 1 \\ \frac{-2}{ax^2}, & x > 1 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x = 1$ debe coincidir las derivadas laterales: $f'(1^+) = f'(1^-)$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{ax^2} = \frac{-2}{a} \\ f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2ax = -2a \\ f'(1^+) &= f'(1^-) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{a} = -2a \Rightarrow -2 = -2a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Conclusión: La función es continua y derivable para $a = 1$. La función es continua y no es derivable para $a = 2$. La función no es continua para cualquier valor de a distinto de 1 y 2.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx$$

Utilizamos el método de integración por descomposición en fracciones simples.
Descomponemos en fracciones simples la expresión del integrando.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{-1=A} \\ x=-1 \rightarrow -3 = -C \rightarrow \boxed{C=3} \Rightarrow 3 = -9 + 6B + 6 \Rightarrow 6 = 6B \Rightarrow \boxed{B=1} \Rightarrow \\ x=2 \rightarrow 3 = 9A + 6B + 2C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

Aplicamos lo conseguido al cálculo de la integral.

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2} dx =$$

$$= -\ln(x) + \ln(x+1) + 3 \int (x+1)^{-2} dx = -\ln(x) + \ln(x+1) + 3 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} =$$

$$= \boxed{-\ln(x) + \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + K}$$

Ejercicio A5

De todos los números positivos x e y tales que $x + y = 10$ encontrar aquellos para los que el producto $P = x^2 y$ sea máximo.

Ponemos la variable “ y ” en función de “ x ”: $x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$.

Obtenemos la expresión del producto dependiendo solo de la variable “ x ”.

$$\left. \begin{array}{l} P = x^2 y \\ y = 10 - x \end{array} \right\} \Rightarrow P(x) = x^2 (10 - x) = 10x^2 - x^3$$

Determinamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$P(x) = 10x^2 - x^3 \Rightarrow P'(x) = 20x - 3x^2$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 20x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x(20 - 3x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ 20 - 3x = 0 \rightarrow 3x = 20 \rightarrow \boxed{x = \frac{20}{3}} \end{array} \right.$$

Como los números deben ser positivos solo nos sirve como punto crítico $x = \frac{20}{3}$. Sustituimos este valor en la derivada segunda y observamos su signo.

$$P'(x) = 20x - 3x^2 \Rightarrow P''(x) = 20 - 6x \Rightarrow P''\left(\frac{20}{3}\right) = 20 - 6 \cdot \frac{20}{3} = -20 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa el producto es máximo para $x = \frac{20}{3}$.

Para este valor de “ x ” obtenemos $y = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$.

Los números positivos que cumpliendo que suman 10 hacen máximo el producto son $x = \frac{20}{3}$ e $y = \frac{10}{3}$.

Ejercicio B1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones S(a)

$$S(a) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores de a .

b) ¿Hay solución para $a = 2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a+1 & -a & 2a \\ 1 & a & a+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - 2a - \cancel{a} + \cancel{a} + 1 - 2(a+1) + a^2 =$$

$$= a^2 + 1^2 + \cancel{2a} - \cancel{2a} + 1 - 2a - 2 + a^2 = 2a^2 - 2a$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a = 0 \Rightarrow 2a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 2 \quad -1 \\ 0 \quad 2 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad -1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 3}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.

El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad -1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad -1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a=1$ y $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a=0$ es incompatible (sin solución) y para $a=1$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $a=2$ estaríamos en el caso 1 estudiado en el apartado anterior y el sistema tiene solución. Resolvemos el sistema.

$$S(2) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y + z \\ x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2y + z + 3y - 2z = 4 \\ 2 - 2y + z + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - z = 2 \\ 4z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{4}} \Rightarrow y + \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}} \Rightarrow \boxed{x = 2 - 2\frac{7}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}}$$

La solución es $x = -\frac{7}{4}$, $y = \frac{7}{4}$, $z = -\frac{1}{4}$.

Ejercicio B2

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y a la recta

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

El plano que contiene la recta tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta, el otro vector director del plano es el vector que une el punto P con un punto cualquiera de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ Q_r(0, 3, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} Q_r(0, 3, 1) \\ P(2, -1, 2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ_r} = (0, 3, 1) - (2, -1, 2) = (-2, 4, -1)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{u} = \overrightarrow{PQ_r} = (-2, 4, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ P(2, -1, 2) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-2) - 2(y+1) - 2(z-2) - 8(z-2) - 2(y+1) + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 8 - 2y - 2 - 2z + 4 - 8z + 16 - 2y - 2 + x - 2 = 0 \Rightarrow -3x - 4y - 10z + 22 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 3x + 4y + 10z - 22 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene el punto P y la recta r es $\pi: 3x + 4y + 10z - 22 = 0$.

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$, se pide:

- Hallar las asíntotas de f .
- Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.
- ¿Tiene extremos la función f ? En caso afirmativo ¿en que puntos?

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

a) **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^2 - 3}{(-2)^2 - 4} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 3}{2^2 - 4} = \frac{1}{0} = \infty$$

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 - \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

La función tiene una asíntota horizontal: $y = 1$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y de los puntos excluidos del dominio: $x = -2$ y $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ consideramos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{-2(-3)}{((-3)^2 - 4)^2} = \frac{6}{25} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-2(-1)}{((-1)^2 - 4)^2} = \frac{2}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = \frac{-2 \cdot 1}{(1^2 - 4)^2} = \frac{-2}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (0, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ consideramos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-2 \cdot 3}{(3^2 - 4)^2} = \frac{-6}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

- c) La función tiene un extremo en $x = 0$, este extremo es un máximo relativo ya que la función crece antes y decrece después de este valor.

Como $f(0) = \frac{0^2 - 3}{0^2 - 4} = \frac{3}{4}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(0, \frac{3}{4}\right)$.

Ejercicio B4

Representar el recinto del plano limitado por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y por la recta $x = 1$.
Calcular su área.

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

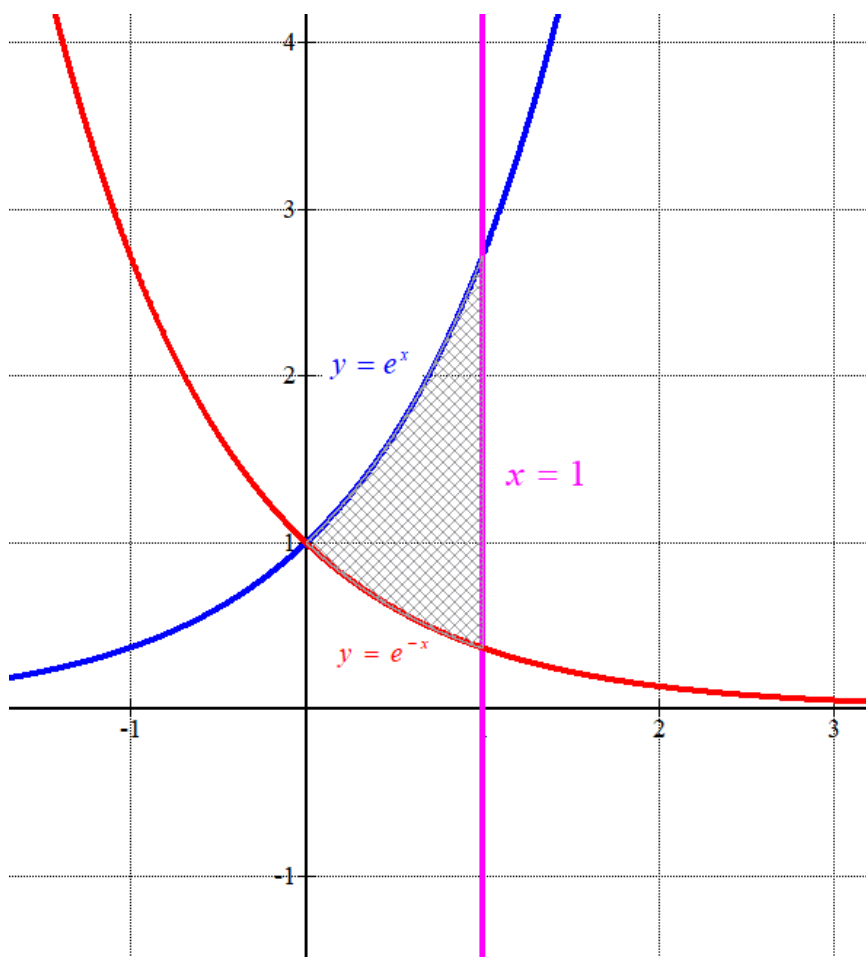
$$\left. \begin{array}{l} y = e^x \\ y = e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Dibujamos las gráficas de ambas funciones y la recta vertical $x = 1$.

x	$y = e^x$
-1	e^{-1}
0	1
1	e

x	$y = e^{-x}$
-1	e
0	1
1	e^{-1}

$x = 1$	y
1	0
1	1



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada de área vemos que el área de la zona rayada tendrá un valor aproximado de 1 unidad cuadrada. Calculamos su valor exacto como la integral definida de 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_0^1 e^x - e^{-x} dx = \left[e^x + e^{-x} \right]_0^1 = \left[e^1 + e^{-1} \right] - \left[e^0 + e^{-0} \right] = e + \frac{1}{e} - 2 \approx 1.086 u^2$$

Ejercicio B5

Si llamamos P a la suma de todos los números pares menores que 1001 y T a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1001, ¿cuánto vale $P - T$?

La suma de los números pares menores de 1001 es la siguiente:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{4 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 998}^{1002} \\
 \overbrace{6 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 996}^{1002} \\
 2 \cdot 1 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 996 + 998 + 2 \cdot 500 = \frac{(2+1000)500}{2} = 250500 \\
 \underbrace{2 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 1000}_{1002}
 \end{array}$$

Hemos aplicado la propiedad de las progresiones aritméticas que cumple que la suma de los extremos va siendo la misma de forma concéntrica. Como hay 500 números pares menores de 1001 la suma de todos es $500/2$ veces $1000 + 2$.

La suma de los múltiplos de 3 menores de 1001 es la siguiente:

$$3 \cdot 1, 6, 9, 12, \dots, 993, 996, 3 \cdot 333 = \frac{(3+999)333}{2} = 166833$$

Hemos aplicado la propiedad de las progresiones aritméticas que cumple que la suma de los extremos va siendo la misma de forma concéntrica. Como hay 333 múltiplos de 3 menores de 1001 la suma de todos es $333/2$ veces $999 + 3$.

La diferencia entre estos dos valores es $P - T = 250500 - 166833 = 83667$