



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumnado deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a las tres preguntas de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ x & -2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el valor de x si sabemos que B es la matriz inversa de A (1 punto)

b) Calcular el determinante de la matriz $(A + I)$ (0,5 puntos).

c) Obtener la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que: $A \cdot X = B$ (1,5 puntos).

Solución:

a) La matriz B es la inversa de la matriz A si se cumple que: $AB = BA = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ x & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4 + 5x = 1 \\ -2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Por lo tanto: $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \times 3 - 5 \times 1 = 9 - 5 = 4$

c) Para obtener la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que: $A \cdot X = B$ hay que resolver los siguientes

sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 5c = -2 \\ a + 2c = 1 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 2b + 5d = 5 \\ b + 2d = -2 \end{cases}$$

Estos sistemas se pueden resolver aplicando distintos métodos:



$$\left. \begin{array}{l} 2a + 5c = -2 \\ a + 2c = 1 \end{array} \right\} \text{despejando de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:}$$

$$a = 1 - 2c \Rightarrow 2(1 - 2c) + 5c = -2 \Rightarrow 2 + c = -2 \Rightarrow c = -4 \text{ y } a = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} 2b + 5d = 5 \\ b + 2d = -2 \end{array} \right\} \text{multiplicando por } -2 \text{ la segunda ecuación y sumando ambas ecuaciones:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2b + 5d = 5 \\ -2b - 4d = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 9 \Rightarrow b = -2 - 2d = -2 - 18 = -20$$

$$\text{De donde } X = \begin{pmatrix} 9 & -20 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2. (3,5 puntos)

Se estima que el beneficio $B(p)$ obtenido por la venta de un producto es función de su precio (p) y de la cantidad demandada de dicho producto $q(p) = 100 - 5p$. Es decir:

$$B(p) = (p - 10)q(p)$$

- Obtener la función beneficio $B(p)$ y determinar para qué precio del producto el beneficio es igual a 80 unidades monetarias (1,5 puntos).
- Determinar el precio que maximiza el beneficio (1,5 puntos).
- Calcular el beneficio máximo (0,5 puntos).

Solución:

a) Para obtener la función de beneficios hay que sustituir $q(p) = 100 - 5p$ en la función de beneficio $B(p)$:

$$B(p) = (p - 10)(100 - 5p) = 100p - 5p^2 - 1000 + 50p = -5p^2 + 150p - 1000$$

Para obtener para que valor o valores de p el beneficio obtenido es igual a 80 unidades, tenemos resolver la ecuación $B(p) = 80$

$$\begin{aligned} B(p) = -5p^2 + 150p - 1000 = 80 &\Rightarrow -5p^2 + 150p - 1080 = 0 \\ p = \frac{-150 \pm \sqrt{150^2 - 4(-5)(-1080)}}{2(-5)} &= \frac{-150 \pm 30}{-10} = \begin{cases} p_1 = 12 \\ p_2 = 18 \end{cases} \end{aligned}$$



Por lo tanto, el beneficio es igual a 80 unidades monetarias si el precio del producto es 12 o 18 unidades monetarias.

b) Para determinar el precio que maximiza el beneficio hay que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada): $B'(p) = -10p + 150 = 0 \Rightarrow p = 15$ unidades monetarias.

Para comprobar que en $p = 15$ hay un máximo vamos utilizar el criterio de la segunda derivada, es decir que $B''(p)$ es negativa en $p = 15$: $B''(15) = -10 < 0$

c) Para calcular el beneficio máximo se sustituye $p = 15$ en la función de beneficios:

$$B(15) = -5 \times 15^2 + 150 \times 15 - 1000 = 125 \text{ unidades monetarias.}$$

Por lo tanto, el máximo beneficio es de 125 unidades monetarias.

Pregunta 3. (3 puntos)

Los siguientes valores corresponden a las calificaciones de 25 alumnos en un examen de matemáticas: 6,5 ; 8 ; 7 ; 9,5 ; 7,5 ; 8 ; 6 ; 7 ; 5,5 ; 8,5 ; 7,5 ; 6,5 ; 8 ; 7 ; 9 ; 7,5 ; 6 ; 8,5 ; 6,5 ; 9,5 ; 7 ; 8 ; 6 ; 7,5 ; 7

- Construir una tabla de frecuencias absolutas y relativas, tanto ordinarias como acumuladas (0,5 puntos)
- Calcular la nota media y la moda (1 punto)
- Calcular el porcentaje de alumnos que han obtenido una nota superior a 7,5 puntos. Obtener el primer cuartil (1,5 puntos)

Solución:

- En primer lugar, vamos a ordenar los datos en una tabla de frecuencias en la que dejamos reflejadas las frecuencias absolutas y relativas, tanto ordinarias (n_i, f_i) como acumuladas (N_i, F_i) :

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
5,5	1	1	1/25=0,04	1/25=0,04
6	3	4	3/25=0,12	4/25=0,16
6,5	3	7	3/25=0,12	7/25=0,28
7	5	12	5/25=0,2	12/25=0,48



7,5	4	16	4/25=0,16	16/25=0,64
8	4	20	4/25=0,16	20/25=0,8
8,5	2	22	2/25=0,08	22/25=0,88
9	1	23	1/25=0,04	23/25=0,91
9,5	2	25	2/25=0,08	25/25=1
TOTAL (N)		25		

b) Para calcular la nota media, es decir, la media aritmética aplicamos la siguiente formula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N}, \text{ en este caso:}$$

$$\bar{x} = \frac{5,5 \times 1 + 6 \times 3 + 6,5 \times 3 + 7 \times 5 + 7,5 \times 4 + 8 \times 4 + 8,5 \times 2 + 9 \times 1 + 9,5 \times 2}{25} = \frac{185}{25} = 7,4$$

La nota media es de 7,4 puntos.

La nota que más se repite es la moda: 7 puntos (se repite 5 veces).

c) Para calcular el porcentaje de alumnos que han obtenido una nota superior a 7,5 puntos nos fijamos en la columna de las frecuencias acumuladas relativas. El 64% de los alumnos han obtenido como mucho 7,5 puntos. Por lo tanto, el 36% de los alumnos han obtenido más de 7,5 puntos.

Para obtener el primer cuartil nos fijamos en la columna de las frecuencias acumuladas (N_i),

buscamos $\frac{1 \times N}{4} = \frac{1 \times 25}{4} = 6,25$, si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer

valor que supera a 6,25. En este caso hay que coger 7 que corresponde a $x_i = 6,5$. Por lo tanto,

$Q_1 = 6,5$, lo que nos indica que el 25% de los alumnos han obtenido como máximo 6,5 puntos.

Otra forma de obtener el primer cuartil sería a partir de la columna de las frecuencias acumuladas relativas (F_i), buscamos 0,25 si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer valor que supera a 0,25. En este caso no aparece 0,25 y hay que coger 0,28 que corresponde a $x_i = 6,5$. Por lo tanto, $Q_1 = 6,5$, lo que nos indica que el 75% de los clientes han esperado como máximo 12 minutos.



OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

Dado el programa lineal:

$$\text{Max } 2x - y$$

sujeto a

$$x + 3y \geq 10$$

$$2x + y \leq 20$$

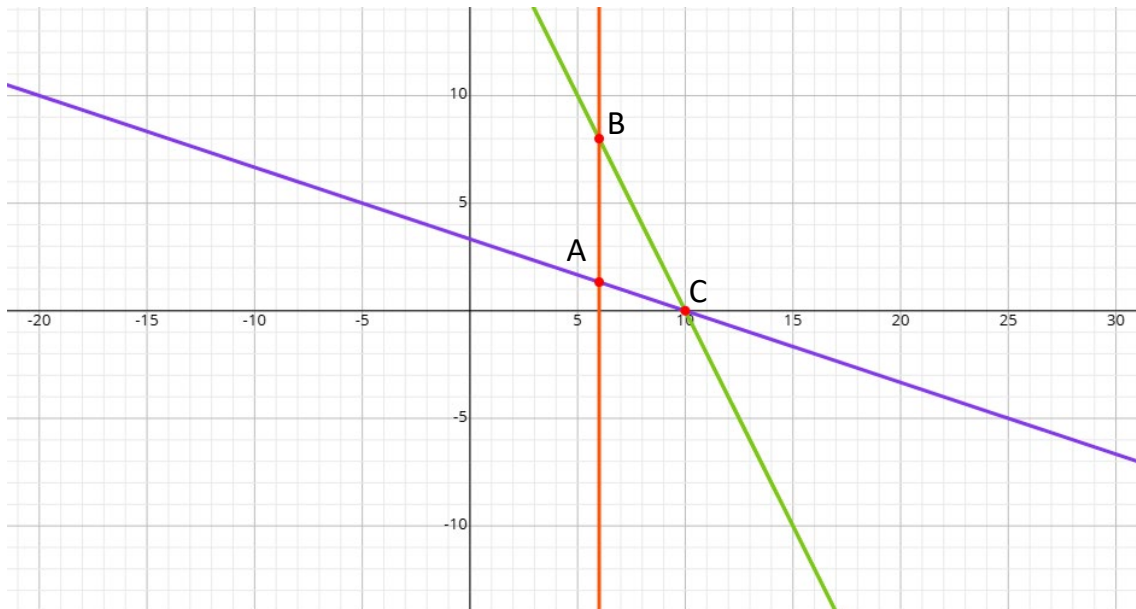
$$x \geq 6$$

$$0 \leq y$$

- a) Representar gráficamente la región factible del programa lineal (1,5 puntos).
- b) ¿Podría encontrarse el máximo en el punto (15,5)? (0,5 puntos).
- c) Resolver el programa lineal (1,5 puntos).

Solución:

- a) El conjunto factible es el recinto representado en la figura. Los vértices de dicho recinto son los puntos: $A(6, 4/3)$, $B(6, 8)$, $C(10, 0)$



Región factible



b) El máximo no podría encontrarse en el punto $(15,5)$, ya que dicho punto está fuera de la región factible.

c) Para obtener el máximo de la función objetivo $z(x, y) = 2x - y$ hay que calcular los valores que toma la función en cada uno de los vértices de la región factible:

$z(A) = \frac{32}{3} \approx 10,6$; $z(B) = 4$; $z(C) = 20$. Por lo tanto, el máximo se alcanza en el punto $C(10,0)$ y el valor máximo que alcanza esta función en la región factible es igual a 20.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

Sea $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$

a) Calcular el dominio de definición de la función y estudiar si la función es continua en el punto $x = 1$ (1,5 puntos).

b) Calcular la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$ (2 puntos).

Solución:

a) En primer lugar, vamos a obtener el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$. Al ser una función racional (cociente de dos funciones polinómicas) estará definida siempre que no se anule el denominador. En este caso $1+x^2 \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$. Luego la función está definida para todo número real: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Con respecto a la continuidad en $x=1$ podemos concluir que en dicho punto la función es continua ya que:

$$\begin{cases} f(1) = \frac{5}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{1+x^2} = \frac{5}{2} \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

b) Para calcular la derivada de la función aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente:

$$\text{Si } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = (g/h)'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$



$$\text{En este caso: } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{5x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{5(1+x^2) - 2x(5x)}{(1+x^2)^2} = \frac{5+5x^2-10x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{5-5x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{En el punto } x = 2 \Rightarrow f'(2) = \frac{5-20}{(1+4)^2} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}$$

Pregunta 3. (3 puntos)

En un colegio se sabe que la probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es del 30% y que aprueban lengua el 35% de los que aprueban matemáticas y el 20% de los que no aprueban matemáticas. Elegido un alumno al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe lengua? (1,5 puntos).
- Si se sabe que ha aprobado lengua ¿cuál es la probabilidad de que el alumno apruebe matemáticas? (1,5 puntos).

Solución:

Si denotamos por M el suceso “aprueba matemáticas” y por L el suceso “aprueba lengua”, los datos del enunciado se traducen en:

$$P(M) = 0,3 \Rightarrow P(\bar{M}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$P(L / M) = 0,35$$

$$P(L / \bar{M}) = 0,2$$

a) La probabilidad de que apruebe lengua será:

$$P(L) = P(L / M)P(M) + P(L / \bar{M})P(\bar{M}) = 0,35 \times 0,3 + 0,2 \times 0,7 = 0,245$$

b) Si se sabe que un alumno ha aprobado lengua, la probabilidad de que apruebe matemáticas será:

$$P(M / L) = \frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L / M)P(M)}{P(L)} = \frac{0,105}{0,245} = 0,4286$$



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: CRITERIOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

- a) Calcular la matriz B: 1 punto.
- b) Calcular el determinante de la matriz $(A+I)$: 1 punto.
- c) Resolver la ecuación matricial: 1,5 puntos.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

- a) Obtener la función de beneficios y el precio para que el beneficio sea igual a 80 unidades monetarias: 1,5 puntos.
- b) Determinar el precio que maximiza el beneficio: 1,5 puntos.
- c) Obtener el beneficio máximo: 0,5 puntos.

Pregunta 3. (3 puntos)

- a) Construir una tabla de frecuencias: 0,5 puntos.
- b) Calcular la media aritmética y la moda: 1 punto.
- c) Calcular el porcentaje de alumnos que han obtenido una nota superior a 7,5 puntos y obtener el primer cuartil: 1.5 puntos.

OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

- a) Representación gráfica de la región factible: 1,5 puntos.
- b) Responder razonadamente si el máximo puede estar en el punto: 0,5 puntos.
- c) Resolver el programa lineal: 1,5 puntos.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

- a) Calcular el dominio de definición de la función y estudiar la continuidad: 1,5 puntos.
- b) Calcular la derivada: 2 puntos.

Pregunta 3. (3 puntos)

- a) Resolución: 1,5 puntos.
- b) Resolución: 1,5 puntos.