

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**INDICACIONES**

- El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera). En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
- Cada ejercicio se calificará sobre una puntuación máxima de 10 puntos. La nota del examen será la media aritmética de esas tres puntuaciones.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permite utilizar una calculadora científica básica con funciones estadísticas, pero queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

EJERCICIO 1 [10 puntos]

Una librería necesita enviar 215 libros en cajas de tres tamaños diferentes: pequeña (5 libros), mediana (10 libros) y grande (15 libros), con un total de 25 cajas disponibles. La cantidad de cajas pequeñas y medianas juntas debe ser cuatro veces la cantidad de cajas grandes.

A. [5 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada tipo que se deben usar para enviar el pedido completo.

B. [2 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [3 PUNTOS] Resuélvalo.

EJERCICIO 2 [10 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

Obtenga la matriz X tal que $AX + 4I = 2B^t$, donde I es la matriz identidad y B^t es la transpuesta de la matriz B .

EJERCICIO 3 [10 puntos]

Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$.

A. [5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 4 [10 puntos]

Dada la función:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4, & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x + 3, & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{x + 3b - 2}{x - 1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

A. [6 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [4 PUNTOS] Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior.

EJERCICIO 5 [10 puntos]

Una empresa realiza una encuesta entre sus trabajadores sobre sus hábitos de alimentación. Se les pregunta cuántas veces a la semana consumen comida rápida. Los datos recopilados son los siguientes:

Número de veces por semana	0	1	2	3	4	5	6
Número de trabajadores	8	11	13	15	10	3	1

Calcule:

A. [2 puntos] Media.

B. [2 puntos] Moda.

C. [3 puntos] Mediana.

D. [3 puntos] Desviación típica.

EJERCICIO 6 [10 puntos]

En una encuesta sobre los hábitos de consumo de medios de comunicación, se encontró que el 35% prefieren leer periódicos, el 45% prefieren ver programas de televisión y el resto prefieren escuchar programas de radio. Además, se descubrió que el 50% de los que prefieren leer periódicos, el 60% de los que prefieren ver programas de televisión y el 15% de los que prefieren escuchar programas de radio también acceden a noticias por internet. Si se escoge al azar una persona:

A. [2 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera ver programas de televisión y también acceda a noticias por internet?

B. [2 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera escuchar programas de radio y no acceda a noticias por internet?

C. [3 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que acceda a noticias por internet?

D. [3 PUNTOS] Si no accede a noticias por internet, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera ver programas de televisión?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 [10 puntos]

Una librería necesita enviar 215 libros en cajas de tres tamaños diferentes: pequeña (5 libros), mediana (10 libros) y grande (15 libros), con un total de 25 cajas disponibles. La cantidad de cajas pequeñas y medianas juntas debe ser cuatro veces la cantidad de cajas grandes.

A. [5 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada tipo que se deben usar para enviar el pedido completo.

B. [2 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [3 PUNTOS] Resuélvalo.

A. Llamamos “x” al número de cajas pequeñas, “y” al de cajas medianas y “z” al de cajas grandes.

“Tiene 25 cajas disponibles” $\rightarrow x + y + z = 25$

“La cantidad de cajas pequeñas y medianas juntas debe ser cuatro veces la cantidad de cajas grandes” $\rightarrow x + y = 4z$

“Una librería necesita enviar 215 libros en cajas de tres tamaños diferentes: pequeña (5 libros), mediana (10 libros) y grande (15 libros)” $\rightarrow 5x + 10y + 15z = 215$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ x + y = 4z \\ 5x + 10y + 15z = 215 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ x + y - 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 43 \end{array} \right\}$$

B. Estudiamos su compatibilidad usando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ x + y - 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 43 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad +y \quad -4z \quad = 0 \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -25 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -5z \quad = -25 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad +2y \quad +3z \quad = 43 \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -25 \\ \hline 0 \quad y \quad +2z \quad = 18 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ -5z = -25 \\ y + 2z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a \leftrightarrow \text{Ecuación } 3^a \\ x + y + z = 25 \\ y + 2z = 18 \\ -5z = -25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ y + 2z = 18 \\ z = 5 \end{array} \right\}$$

El sistema triangular equivalente obtenido es compatible determinado.

C. Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ y + 2z = 18 \\ \boxed{z = 5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 5 = 25 \\ y + 10 = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ \boxed{y = 8} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 8 = 20 \Rightarrow \boxed{x = 12}$$

Se deben enviar los libros en 12 cajas pequeñas, 8 medianas y 5 grandes.

EJERCICIO 2 [10 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

Obtenga la matriz X tal que $AX + 4I = 2B^T$, donde I es la matriz identidad y B^T es la transpuesta de la matriz B .

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + 4I = 2B^T \Rightarrow AX = 2B^T - 4I \Rightarrow X = A^{-1}(2B^T - 4I)$$

Hallamos la inversa de A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X .

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2B^t - 4I = 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 & 4-0 \\ 2-0 & 18-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2B^t - 4I) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ -5+2 & -10+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 3 [10 puntos]

Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$.

A. [5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

A. Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad -1 \quad 4 \\ 1 \mid \quad 1 \quad -3 \quad -4 \Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x-1)(x^2 - 3x - 4) \\ \hline 1 \quad -3 \quad -4 \quad 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 = x \\ \frac{3-5}{2} = -1 = x \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow (x-1)(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

Con el eje de abscisas la función tiene 3 puntos de corte: A(1, 0), B(4, 0) y C(-1, 0).

Hallamos los puntos de corte con el eje de ordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 0 + 4 = 4 \Rightarrow D(0, 4)$$

Con el eje de ordenadas la función tiene 1 punto de corte D(0, 4).

B. Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 8x - 1 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 8x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(-1)}}{6} = \frac{8 \pm 2\sqrt{19}}{6} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8+2\sqrt{19}}{6} = \frac{4+\sqrt{19}}{3} \approx 2.79 \\ \frac{8-2\sqrt{19}}{6} = \frac{4-\sqrt{19}}{3} \approx -0.12 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos, uno en $\frac{4-\sqrt{19}}{3} \approx -0.12$ y otro en $\frac{4+\sqrt{19}}{3} \approx 2.79$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 1 = 10 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}, \frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 1 = -1 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}, \frac{4+\sqrt{19}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$ consideramos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = 3 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10 - 1 = 219 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right).$$

La función crece en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}, \frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)$.

EJERCICIO 4 [10 puntos]

Dada la función:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4, & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x + 3, & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{x+3b-2}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

A. [6 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [4 PUNTOS] Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior.

A. Para que la función sea continua en todo su dominio debe serlo en $x = -1$ y en $x = 2$.

La función es continua en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= a(-1)^2 - 4 = a - 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} ax^2 - 4 = a - 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 - x + 3 = (-1)^3 - (-1) + 3 = 3 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 4 = 3 \Rightarrow \boxed{a = 7}$$

La función es continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 2 + 3 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 - x + 3 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3b-2}{x-1} = \frac{2+3b-2}{2-1} = 3b \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Los valores necesarios para que se cumpla lo pedido son $a = 7$ y $b = 3$.

B. Para los valores obtenidos la función queda
$$f(x) = \begin{cases} 7x^2 - 4, & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x + 3, & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{x+9-2}{x-1} = \frac{x+7}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calculamos el límite de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^2 - 4 = +\infty - 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+7}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

EJERCICIO 5 [10 puntos]

Una empresa realiza una encuesta entre sus trabajadores sobre sus hábitos de alimentación. Se les pregunta cuántas veces a la semana consumen comida rápida. Los datos recopilados son los siguientes:

Número de veces por semana	0	1	2	3	4	5	6
Número de trabajadores	8	11	13	15	10	3	1

Calcule:

- A. [2 puntos] Media.
 B. [2 puntos] Moda.
 C. [3 puntos] Mediana.
 D. [3 puntos] Desviación típica.

A. Media.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{8 + 11 + 13 + 15 + 10 + 3 + 1} = \frac{143}{61} \approx 2.3443 \text{ veces por semana}$$

B. Moda = 3 veces por semana, pues tiene la frecuencia más alta (15 trabajadores)

C. Mediana. Añadimos la frecuencia acumulada.

Número de veces por semana	0	1	2	3	4	5	6
Número de trabajadores (frecuencia)	8	11	13	15	10	3	1
Frecuencia acumulada	8	19	32	47	57	60	61

$$\frac{61}{2} = 30.5 \Rightarrow \begin{cases} 30^\circ \rightarrow 2 \text{ veces por semana} \\ 31^\circ \rightarrow 2 \text{ veces por semana} \end{cases} \Rightarrow \text{Mediana} = 2 \text{ veces por semana}$$

D. Desviación típica. (σ)

Número de veces por semana (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36
Número de trabajadores (f_i)	8	11	13	15	10	3	1
$x_i^2 \cdot f_i$	0	11	52	135	160	75	36

Utilizamos las fórmulas: $\text{Varianza} = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$; $\sigma = \sqrt{\text{Varianza}}$.

$$\text{Varianza} = \frac{0^2 \cdot 8 + 1^2 \cdot 11 + 2^2 \cdot 13 + 3^2 \cdot 15 + 4^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 1}{61} - \left(\frac{143}{61}\right)^2 = \frac{8160}{3721} \approx 2.193$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{2.193} \approx 1.481 \text{ veces por día}$$

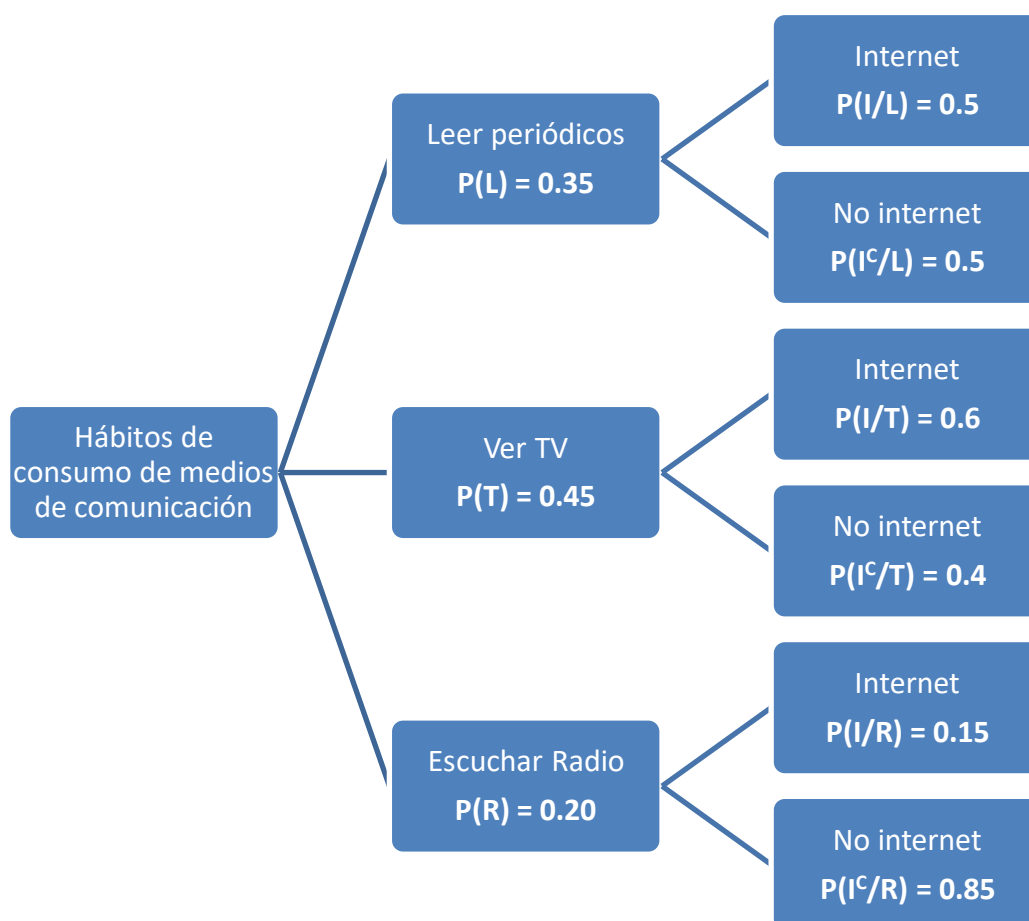
EJERCICIO 6 [10 puntos]

En una encuesta sobre los hábitos de consumo de medios de comunicación, se encontró que el 35% prefieren leer periódicos, el 45% prefieren ver programas de televisión y el resto prefieren escuchar programas de radio. Además, se descubrió que el 50% de los que prefieren leer periódicos, el 60% de los que prefieren ver programas de televisión y el 15% de los que prefieren escuchar programas de radio también acceden a noticias por internet. Si se escoge al azar una persona:

- A. [2 PUNTOS]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera ver programas de televisión y también acceda a noticias por internet?
- B. [2 PUNTOS]** ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera escuchar programas de radio y no acceda a noticias por internet?
- C. [3 PUNTOS]** ¿Cuál es la probabilidad de que acceda a noticias por internet?
- D. [3 PUNTOS]** Si no accede a noticias por internet, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera ver programas de televisión?

Llamamos L = "Leer periódicos", T = "Ver Televisión", R = "Escuchar la Radio" e I = "Acceder a noticias por Internet".

Realizamos un diagrama de árbol.



A. Nos piden calcular $P(T \cap I)$.

$$P(T \cap I) = P(T)P(I/T) = 0.45 \cdot 0.6 = \boxed{0.27}$$

B. Nos piden calcular $P(R \cap I^c)$.

$$P(R \cap I^c) = P(R)P(I^c / R) = 0.2 \cdot 0.85 = \boxed{0.17}$$

C. Nos piden calcular $P(I)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(I) = P(L)P(I / L) + P(T)P(I / T) + P(R)P(I / R) = 0.35 \cdot 0.5 + 0.45 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.15 = \boxed{0.475}$$

D. Nos piden calcular $P(T / I^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T / I^c) = \frac{P(T \cap I^c)}{P(I^c)} = \frac{P(T)P(I^c / T)}{1 - P(I)} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{1 - 0.475} = \boxed{\frac{12}{35} \approx 0.3429}$$