

	Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado Mayores 25 y 45 años Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº páginas: 3 (incluye tabla)
---	--	--	--

OPTATIVIDAD: CADA PERSONA DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas.

Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Un ahorrador decide invertir 30000 euros que ha reunido. Para ello, consulta a un asesor financiero, que le recomienda invertir en tres tipos de productos financieros: renta fija, renta variable y rentas vitalicias. Dado que es un inversor prudente, decide invertir en renta fija el doble de la cantidad invertida en renta variable. Además, el asesor le indica que la inversión total en renta fija y en renta variable debe ser el triple de la inversión en rentas vitalicias. Plantear el sistema de ecuaciones lineales que describe el problema y determinar la cantidad a invertir en cada tipo de producto financiero.

2A- Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función cuando $a = 1$.

b) Calcular el valor que debe tomar a para que la función tenga un máximo en $x = 1$.

3A- Se ha realizado una encuesta a jóvenes españoles amantes del fútbol. El 30 % de los encuestados es fan del Barcelona, un 65 % del Real Madrid y el resto del Atlético de Madrid. De los seguidores del Barcelona, un 20 % ve los partidos en un bar, porcentaje que se eleva al 30 % entre los que son del Real Madrid y al 80 % entre los que son del Atlético de Madrid. Calcular el porcentaje de jóvenes amantes del fútbol que no van a un bar a ver el fútbol.

4A- Una persona quiere participar en un concurso de televisión que admite a 10 de cada 1000 solicitantes. Los solicitantes admitidos deben superar una prueba previa a la participación definitiva en dicho programa de televisión. Esta prueba previa es superada por el 25 % de los admitidos inicialmente. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona participe en el concurso, esto es, que sea admitida inicialmente y además supere la prueba previa?

Opción B

1B- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1/2 \\ b & 1/2 \end{pmatrix}$. Calcular los valores de a y b tal que $A^2 = A$.

2B- El número de bacterias de un cultivo (en millones) y su comportamiento ante un antibiótico viene dado por la función $f(t) = -2t^3 + 24t + 100$ con $t \in [0, 5]$ expresado en días.

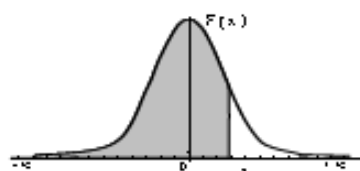
- a) Determinar el número de bacterias con las que se ha iniciado el cultivo.
- b) Calcular al cabo de cuántos días se alcanza el máximo número de bacterias.
- c) Razonar si en algún momento se conseguirá eliminar las bacterias del cultivo.

3B- El error cometido en el peso al envasar cada paquete de legumbres en una empresa de alimentación sigue una distribución normal de media 10 g y desviación típica 2 g. Calcular la probabilidad de que el error cometido en el peso al envasar un paquete se encuentre entre 9 g y 14 g.

4B- El 55 % de los jubilados de Castilla y León van a natación o a gimnasia. Sabiendo que el 30 % va a natación y el 35 % va a gimnasia, ¿qué porcentaje de jubilados va a ambas?

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

Opción A

1A- Un ahorrador decide invertir 30000 euros que ha reunido. Para ello, consulta a un asesor financiero, que le recomienda invertir en tres tipos de productos financieros: renta fija, renta variable y rentas vitalicias. Dado que es un inversor prudente, decide invertir en renta fija el doble de la cantidad invertida en renta variable. Además, el asesor le indica que la inversión total en renta fija y en renta variable debe ser el triple de la inversión en rentas vitalicias. Plantear el sistema de ecuaciones lineales que describe el problema y determinar la cantidad a invertir en cada tipo de producto financiero.

Llamamos “x” al dinero invertido en renta fija, “y” al dinero invertido en renta variable y “z” al dinero invertido en rentas vitalicias.

“Un ahorrador decide invertir 30000 euros que ha reunido” $\rightarrow x + y + z = 30000$

“Decide invertir en renta fija el doble de la cantidad invertida en renta variable” $\rightarrow x = 2y$

“La inversión total en renta fija y en renta variable debe ser el triple de la inversión en rentas vitalicias” $\rightarrow x + y = 3z$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30000 \\ x = 2y \\ x + y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + y + z = 30000 \\ 2y + y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + z = 30000 \\ 3y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + z = 30000 \\ y = z \end{array} \right\} \Rightarrow 3z + z = 30000 \Rightarrow 4z = 30000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[z = \frac{30000}{4} = 7500 \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 7500} \\ \boxed{x = 2 \cdot 7500 = 15000} \end{array} \right.$$

Debe invertir 15000 euros en renta fija, 7500 euros en renta variable y otros 7500 euros en rentas vitalicias.

2A- Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función cuando $a = 1$.

b) Calcular el valor que debe tomar a para que la función tenga un máximo en $x = 1$.

a) Cuando $a = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ pues está definida como dos trozos de parábola.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 + x + 1 = -0^2 + 0 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = 0$, y por tanto es continua en $\mathbb{R}$.

b) En un entorno de $x = 1$ la función es $f(x) = -x^2 + ax + 1$.

Para que la función tenga un máximo en $x = 1$ debe de anularse la derivada primera y la segunda debe tomar un valor negativo.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + ax + 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + a \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Para $a = 2$ la derivada primera se anula en $x = 1$. Comprobamos que la segunda derivada es negativa.

$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(1) = -2 < 0$$

Se cumple y la función tiene un máximo en $x = 1$.

El valor que debe tomar a para que la función tenga un máximo en $x = 1$ es $a = 2$.

3A- Se ha realizado una encuesta a jóvenes españoles amantes del fútbol. El 30 % de los encuestados es fan del Barcelona, un 65 % del Real Madrid y el resto del Atlético de Madrid. De los seguidores del Barcelona, un 20 % ve los partidos en un bar, porcentaje que se eleva al 30 % entre los que son del Real Madrid y al 80 % entre los que son del Atlético de Madrid. Calcular el porcentaje de jóvenes amantes del fútbol que no van a un bar a ver el fútbol.

De los encuestados son fan del Atlético de Madrid el $100 - 30 - 65 = 5\%$ de ellos.

De los seguidores del Barcelona (30% del total), un 20 % ve los partidos en un bar, es decir, $30 \cdot 0.20 = 6\%$ del total son fans del Barcelona que ven los partidos en un bar.

De los seguidores del Real Madrid (65% del total), un 30 % ve los partidos en un bar, es decir, $65 \cdot 0.30 = 19.5\%$ del total son fans del Real Madrid que ven los partidos en un bar.

De los seguidores del Atlético de Madrid (5% del total), un 80 % ve los partidos en un bar, es decir, $5 \cdot 0.80 = 4\%$ del total son fans del Atlético de Madrid que ven los partidos en un bar.

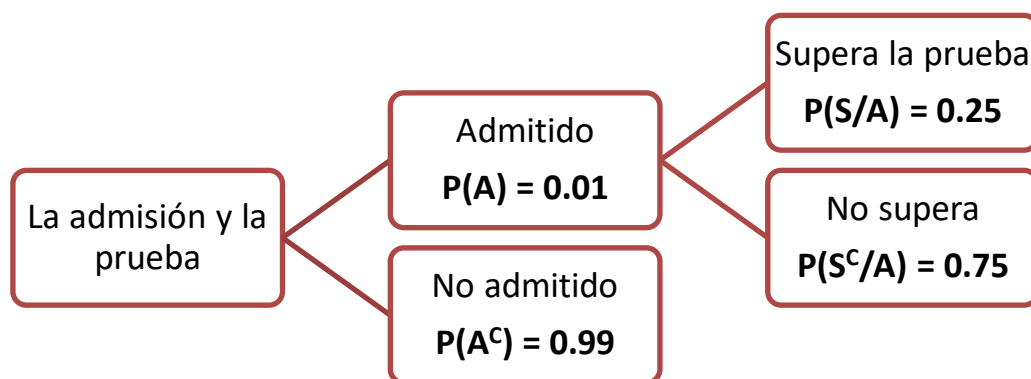
Por lo que de todos los encuestados ven los partidos en un bar el $6 + 19.5 + 4 = 29.5\%$ del total de encuestados.

El $100 - 29.5 = 70.5\%$ de los encuestados no van a un bar a ver el fútbol.

4A- Una persona quiere participar en un concurso de televisión que admite a 10 de cada 1000 solicitantes. Los solicitantes admitidos deben superar una prueba previa a la participación definitiva en dicho programa de televisión. Esta prueba previa es superada por el 25 % de los admitidos inicialmente. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona participe en el concurso, esto es, que sea admitida inicialmente y además supere la prueba previa?

Llamamos A al suceso “Ser admitido para la prueba” y S a “Superar la prueba”.

Sabemos que $P(A) = \frac{10}{1000} = 0.01$ y $P(S/A) = 0.25$. Hacemos un diagrama de árbol.



Nos piden determinar el valor de $P(A \cap S)$.

$$P(A \cap S) = P(A)P(S/A) = 0.01 \cdot 0.25 = \boxed{0.0025}$$

La probabilidad de que una persona sea admitida y además supere la prueba previa es de 0.0025.

Opción B

1B- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1/2 \\ b & 1/2 \end{pmatrix}$. Calcular los valores de a y b tal que $A^2 = A$.

Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned}
 A^2 = A &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1/2 \\ b & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1/2 \\ b & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1/2 \\ b & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b/2 & a/2 + 1/4 \\ ab + b/2 & b/2 + 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1/2 \\ b & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{b}{2} = a \\ \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ ab + \frac{b}{2} = b \\ \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 + b = 2a \\ 2a + 1 = 2 \\ 2ab + b = 2b \\ 2b + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 + b = 2a \\ 2a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \\ 2ab = b \\ 2b = 1 \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{¡Se cumplen!}
 \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a = b = \frac{1}{2}$.

2B- El número de bacterias de un cultivo (en millones) y su comportamiento ante un antibiótico viene dado por la función $f(t) = -2t^3 + 24t + 100$ con $t \in [0, 5]$ expresado en días.

- Determinar el número de bacterias con las que se ha iniciado el cultivo.
- Calcular al cabo de cuántos días se alcanza el máximo número de bacterias.
- Razonar si en algún momento se conseguirá eliminar las bacterias del cultivo.

a) Debemos calcular $f(0)$.

$$f(0) = -2 \cdot 0^3 + 24 \cdot 0 + 100 = 100$$

Se ha iniciado el cultivo con 100 millones de bacterias.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= -2t^3 + 24t + 100 \Rightarrow f'(t) = -6t^2 + 24 \\ f'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6t^2 + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2}$$

Sustituimos $t = 2$ en la segunda derivada: $f''(t) = -12t \Rightarrow f''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0$.

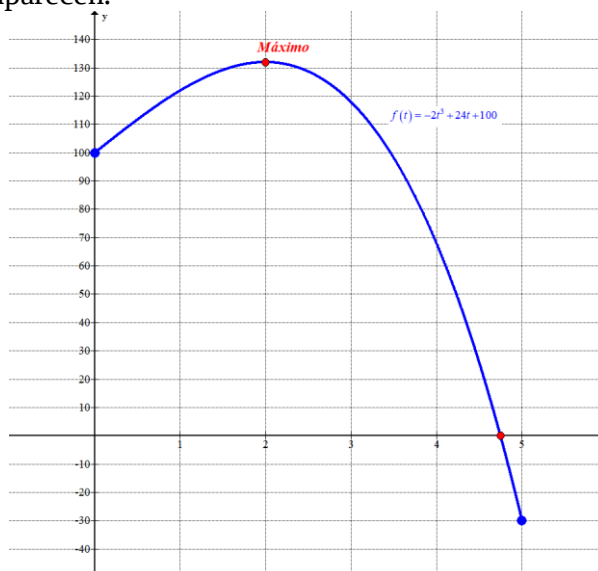
En el segundo día hay un máximo relativo de la población de bacterias. Siendo esta población de $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 + 100 = 132$ millones.

c) Nos preguntan si existe $t \in [0, 5]$ tal que $f(t) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= -2t^3 + 24t + 100 \\ f(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2t^3 + 24t + 100 = 0 \Rightarrow t^3 - 12t - 50 = 0 \Rightarrow ?$$

La población de bacterias es una función continua, empieza con 100 millones, crece hasta los 132 millones y por último decrece hasta $f(5) = -2 \cdot 5^3 + 24 \cdot 5 + 100 = -30$ millones. Este último valor no tiene sentido pues es una población negativa, por lo que la población de bacterias se elimina entre el día 2 y el día 5.

Como $f(4) = -2 \cdot 4^3 + 24 \cdot 4 + 100 = 68 > 0$ y $f(5) = -30 < 0$ podemos decir que entre el día 4 y el 5 las bacterias desaparecen.



3B- El error cometido en el peso al envasar cada paquete de legumbres en una empresa de alimentación sigue una distribución normal de media 10 g y desviación típica 2 g. Calcular la probabilidad de que el error cometido en el peso al envasar un paquete se encuentre entre 9 g y 14 g.

X = El error cometido en el peso al envasar cada paquete de legumbres. $X = N(10, 2)$

Nos piden calcular $P(9 \leq X \leq 14)$.

$$\begin{aligned}
 P(9 \leq X \leq 14) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{9-10}{2} \leq Z \leq \frac{14-10}{2}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 1) = \\
 &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 0.5) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8413 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.5328}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que el error cometido en el peso al envasar un paquete se encuentre entre 9 g y 14 g es de 0.5328.

	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0
0.1	0.5398	0.5438	0
0.2	0.5793	0.5832	0
0.3	0.6179	0.6217	0
0.4	0.6554	0.6591	0
0.5	0.6915	0.6950	0
0.6	0.7257	0.7291	0
0.7	0.7580	0.7611	0
0.8	0.7881	0.7910	0
0.9	0.8159	0.8186	0
1.0	0.8413	0.8438	0
1.1	0.8643	0.8665	0
1.2	0.8849	0.8869	0

4B- El 55 % de los jubilados de Castilla y León van a natación o a gimnasia. Sabiendo que el 30 % va a natación y el 35 % va a gimnasia, ¿qué porcentaje de jubilados va a ambas?

Llamamos N a “El jubilado va a natación” y G a “El jubilado va a gimnasia”.

Nos dicen que $P(N \cup G) = 0.55$, $P(N) = 0.3$ y $P(G) = 0.35$.

Nos piden calcular $P(N \cap G)$.

$$P(N \cup G) = P(N) + P(G) - P(N \cap G) \Rightarrow 0.55 = 0.3 + 0.35 - P(N \cap G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N \cap G) = 0.3 + 0.35 - 0.55 = 0.10$$

Hay un 10 % de jubilados que va a ambas actividades.