

	Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado Mayores 25 y 45 años Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº páginas: 3 (incluye tabla)
---	--	--	--

OPTATIVIDAD: CADA PERSONA DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas.

Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Clasificar, en función del número de soluciones, el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2A- Dada la función $f(x) = -3x^2 + ax - b$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(2) = -11$ y que $f'(1) = -3$.

3A- Un hortelano abona el 90 % del terreno de su huerta. Se sabe que, en tierra abonada, la probabilidad de que una planta de lechuga se estropee es 0.1. Sin embargo, sin abono, la probabilidad de que una planta de lechuga se estropee es 0.7.

Se elige una planta de lechuga al azar y resulta estar estropeada, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera en tierra no abonada?

4A- Un fabricante asegura que el 5 % de sus bombillas duran más de 5 años. Si en una casa hay instaladas 2 bombillas de ese fabricante, calcular la probabilidad de que ambas duren más de 5 años.

Opción B

1B- En una pastelería se envasan cajas de bombones de tres tamaños: 250 gramos, 500 gramos y 1 kilogramo. Debido a un error logístico, las cajas envasadas el día de Navidad se llevaron al almacén sin anotar cuántas había de cada tipo. Se sabe que, en total, eran 60 cajas y que el número de cajas de tamaño mediano (500 gramos) es igual al número de cajas de tamaño pequeño (250 gramos) más cinco cajas. Sabiendo que el precio del kilogramo de bombones era de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados el día de Navidad ascendía a 1250 euros, determinar cuántas cajas se envasaron de cada tipo el día de Navidad.

2B- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudiar razonadamente su continuidad.

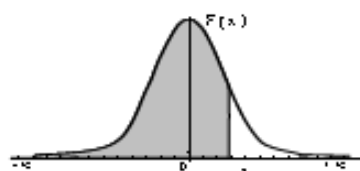
b) Representar gráficamente la función $f(x)$ en el intervalo $[-1, 4]$.

3B- El gasto mensual (en euros) en compras *on-line* de una determinada población sigue una ley normal de media 100 euros y desviación típica 15 euros. Determinar el porcentaje de esa población cuyo gasto mensual en compras *on-line* está entre 95 y 110 euros.

4B- El 70 % de los aficionados al fútbol de un país son simpatizantes del equipo A o del equipo B. Solo el 10 % de los aficionados al fútbol son seguidores de ambos. Si el 50 % de los aficionados al fútbol son seguidores del B, ¿cuál es la probabilidad de que un aficionado al fútbol sea seguidor del A?

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

Opción A

1A- Clasificar, en función del número de soluciones, el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como es un sistema homogéneo siempre tiene solución. Las únicas dos opciones son que la solución sea única: $x = y = z = 0$ o que tenga infinitas soluciones.

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 + 1 - 2 = 0$$

El determinante es nulo y el rango de A es menor de 3.

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

El rango de A (2) es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

2A- Dada la función $f(x) = -3x^2 + ax - b$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(2) = -11$ y que $f'(1) = -3$.

Aplicamos que $f(2) = -11$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -11 \\ f(x) = -3x^2 + ax - b \end{array} \right\} \Rightarrow -11 = -3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 - b \Rightarrow -11 = -12 + 2a - b \Rightarrow \boxed{b = 2a - 1}$$

Aplicamos que $f'(1) = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = -3 \\ f(x) = -3x^2 + ax - b \rightarrow f'(x) = -6x + a \end{array} \right\} \Rightarrow -3 = -6 \cdot 1 + a \Rightarrow -3 + 6 = a \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Sustituimos $a = 3$ en la primera igualdad obtenida.

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2a - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 6 - 1 = 5}$$

Para $a = 3$ y $b = 5$ se cumple lo indicado en el ejercicio.

3A- Un hortelano abona el 90 % del terreno de su huerta. Se sabe que, en tierra abonada, la probabilidad de que una planta de lechuga se estropee es 0.1. Sin embargo, sin abono, la probabilidad de que una planta de lechuga se estropee es 0.7.

Se elige una planta de lechuga al azar y resulta estar estropeada, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera en tierra no abonada?

Llamamos A = “La lechuga está en tierra abonada” y B = “La lechuga se estropea”.

Sabemos que $P(A) = 0.9$, $P(B/A) = 0.1$ y $P(B/\bar{A}) = 0.7$.

Nos piden calcular $P(\bar{A}/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A})P(B/\bar{A})}{P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})} =$$

$$= \frac{(1-0.9) \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.1 + (1-0.9) \cdot 0.7} = \boxed{\frac{7}{16} = 0.4375}$$

La probabilidad de que una lechuga estropeada estuviera en tierra no abonada es de 0.4375.

4A- Un fabricante asegura que el 5 % de sus bombillas duran más de 5 años. Si en una casa hay instaladas 2 bombillas de ese fabricante, calcular la probabilidad de que ambas duren más de 5 años.

La duración de la segunda bombilla es independiente de la duración de la primera, por lo que la probabilidad de que las dos bombillas duren más de 5 años es el producto de las probabilidades de que la primera y segunda bombilla duren más de 5 años.

$$P(B1 \cap B2) = P(B1)P(B2) = 0.05 \cdot 0.05 = 0.0025$$

La probabilidad de que ambas bombillas duren más de 5 años es de 0.0025.

Opción B

1B- En una pastelería se envasan cajas de bombones de tres tamaños: 250 gramos, 500 gramos y 1 kilogramo. Debido a un error logístico, las cajas envasadas el día de Navidad se llevaron al almacén sin anotar cuántas había de cada tipo. Se sabe que, en total, eran 60 cajas y que el número de cajas de tamaño mediano (500 gramos) es igual al número de cajas de tamaño pequeño (250 gramos) más cinco cajas. Sabiendo que el precio del kilogramo de bombones era de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados el día de Navidad ascendía a 1250 euros, determinar cuántas cajas se envasaron de cada tipo el día de Navidad.

Llamamos “x” al número de cajas de 250 gramos que se envasan, “y” al número de cajas de 500 gramos y “z” al número de cajas de 1000 gramos.

“En total, eran 60 cajas” $\rightarrow x + y + z = 60$

“El número de cajas de tamaño mediano (500 gramos) es igual al número de cajas de tamaño pequeño (250 gramos) más cinco cajas” $\rightarrow y = x + 5$

“El precio del kilogramo de bombones era de 40 euros y el importe total de los bombones envasados el día de Navidad ascendía a 1250 euros” $\rightarrow 40(0.25x + 0.5y + z) = 1250$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y = x + 5 \\ 40(0.25x + 0.5y + z) = 1250 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y = x + 5 \\ 0.25x + 0.5y + z = \frac{1250}{40} = 31.25 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + x + 5 + z = 60 \\ 0.25x + 0.5(x + 5) + z = 31.25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + z = 55 \\ 0.25x + 0.5x + 2.5 + z = 31.25 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 55 - 2x \\ 0.75x + z = 28.75 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.75x + 55 - 2x = 28.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1.25x = -26.25 \Rightarrow x = \frac{26.25}{1.25} = 21 \Rightarrow \begin{cases} y = 21 + 5 = 26 \\ z = 55 - 2 \cdot 21 = 13 \end{cases}$$

Se envasaron 21 cajas de 250 gramos, 26 de 500 gramos y 13 de 1 kilogramo.

2B- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Estudiar razonadamente su continuidad.
 b) Representar gráficamente la función $f(x)$ en el intervalo $[-1, 4]$.

a) La función en $(-\infty, 1)$ tiene la expresión $f(x) = 3x$, que es una función lineal y continua.

La función en $(1, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = x^2$, que es una función polinómica y continua.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

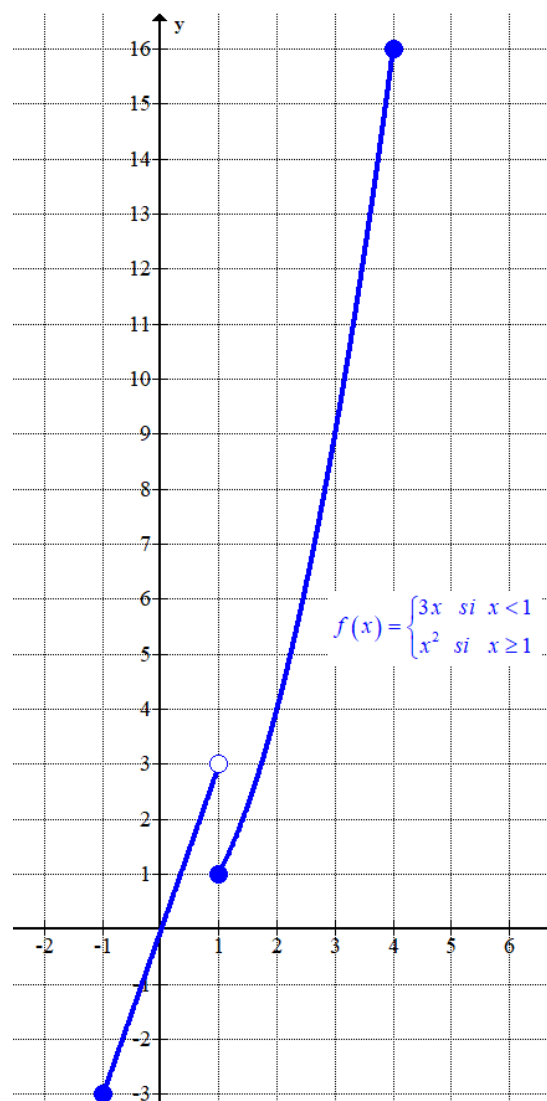
La función no es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

- b) La función en el intervalo $[-1, 4]$ cambia de definición en $x = 1$. Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$x \in [-1, 1)$	$f(x) = 3x$
-1	-3
0	0
1	3 (No incluido)

$x \in [1, 4]$	$f(x) = x^2$
1	1
2	4
4	16



3B- El gasto mensual (en euros) en compras *on-line* de una determinada población sigue una ley normal de media 100 euros y desviación típica 15 euros. Determinar el porcentaje de esa población cuyo gasto mensual en compras *on-line* está entre 95 y 110 euros.

X = El gasto mensual (en euros) en compras *on-line* de una población. $X = N(100, 15)$

Calculamos $P(95 \leq X \leq 110)$.

$$P(95 \leq X \leq 110) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{95-100}{15} \leq Z \leq \frac{110-100}{15}\right) = P(-0.333 \leq Z \leq 0.666) =$$

$$= P(Z \leq 0.666) - P(Z \leq -0.333) = P(Z \leq 0.666) - P(Z \geq 0.333) =$$

$$= P(Z \leq 0.666) - [1 - P(Z \leq 0.333)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{0.7454 + 0.7486}{2} - [1 - 0.6293] = \boxed{0.3763}$$

El porcentaje de esa población cuyo gasto mensual en compras *on-line* está entre 95 y 110 euros es de 37.63 %.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823

4B- El 70 % de los aficionados al fútbol de un país son simpatizantes del equipo A o del equipo B. Solo el 10 % de los aficionados al fútbol son seguidores de ambos. Si el 50 % de los aficionados al fútbol son seguidores del B, ¿cuál es la probabilidad de que un aficionado al fútbol sea seguidor del A?

Llamamos A y B a “Ser simpatizante del equipo A o B”.

Si el 70 % de los aficionados al fútbol de un país son simpatizantes del equipo A o del equipo B, entonces el 30 % restante no simpatizan ni con A ni con B.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Simpatizante del equipo B	No simpatizante del equipo B	
Simpatizante del equipo A	10		
No simpatizante del equipo A		30	
	50		100

Completamos la tabla.

	Simpatizante del equipo B	No simpatizante del equipo B	
Simpatizante del equipo A	10	20	30
No simpatizante del equipo A	40	30	70
	50	50	100

Observamos en la tabla que el 30% de los aficionados al fútbol son simpatizantes del equipo A. La probabilidad de que un aficionado al fútbol sea seguidor del equipo A es de 0.3.