

Instrucciones: Esta prueba consta de dos propuestas (A y B). Se ha de elegir una propuesta y resolver sus 4 problemas. Sólo se pueden utilizar calculadoras tipo II. Calculadoras gráficas o simbólicas no están permitidas. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

Ejercicio 1. Se lanza una pelota hacia arriba desde una terraza con una elevación E desde el suelo. La altura que alcanza depende funcionalmente del tiempo, t , mediante la fórmula $h(t) = 10 + 16t - 2t^2$. Se pide:

- a) Hallar la elevación E de la terraza. **(0.5 puntos)**
- b) ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota la máxima altura? ¿Cuál es dicha altura máxima? **(2 puntos)**

Solución:

- a) Para $t=0$, la altura será $E = h(0) = 10$. **(0.5 puntos)**
- b) Para calcular el máximo de la función de altura, se ha de resolver la ecuación $h'(t)=0$, y comprobar que, efectivamente es un máximo:

$$h'(t) = 16 - 4t = 0 \Rightarrow t = 4$$

$$h''(4) = -4 < 0$$

Luego se tarda $t=4$ en alcanzar la altura máxima, que es $h(4) = 10 + 64 - 32 = 42$.

(1 punto por la obtención del tiempo, 0.25 por la condición de máximo y 0.75 por la obtención de la altura)

Ejercicio 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcula $A^{-1}(B + C)$. **(1 punto)**
- b) Despeja y calcula la matriz X en la ecuación $AX - C = B$. **(1 punto)**
- c) ¿Es posible hallar una matriz Y tal que $YA - C = B$. **(0.5 puntos)**

Solución:

$$a) \det(A) = 1, \quad adj(A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B + C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1}(B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(0.5 por la obtención de A^{-1} , 0.25 por $(B+C)$ y 0.25 por $A^{-1}(B+C)$)

$$b) AX = B + C \Rightarrow X = A^{-1}(B + C) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ (1 punto)}$$

c) Se tendría que cumplir que $YA = B + C \Rightarrow Y = (B + C)A^{-1}$. Pero $(B+C)$ es una matriz de dimensiones (2×3)

A^{-1} es de dimensiones (2×2) , por lo que no es posible efectuar la multiplicación. Así, no se puede hallar una matriz Y que cumpla la ecuación. **(0.5 puntos)**

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

- a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todo el intervalo $[0,3]$. **(1.5 puntos)**
- b) Representa gráficamente la función $f(x)$ cuando $a = 1$ y $b = 2$. **(1 punto)**

Solución:

a) La función es continua en el interior de los tres trozos en los que se define, por lo que los únicos puntos de posible discontinuidad son $x=1$ y $x=2$.

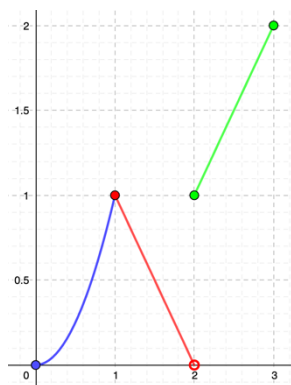
$$\text{Para ser continua en } x=1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b - 1 \Rightarrow a = b - 1$$

Para ser continua en $x=2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = b - 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \Rightarrow b - 2 = 1$

Luego, de la segunda ecuación $b=3$ y, sustituyendo en la primera, $a=2$.

(0.5 puntos por cada ecuación y 0.5 puntos por la resolución del sistema de ecuaciones)

b) Cuando $a = 1$ y $b = 2$, la representación gráfica de la función $f(x)$ es: **(0.25 puntos por cada trozo y 0.25 por la discontinuidad en $x=2$)**



Ejercicio 4. Para otorgar un premio literario se sortea, al azar, un jurado formado por tres novelistas entre un conjunto de 50 personas, de las cuales 30 son mujeres. Se pide:

- La probabilidad de que el jurado esté formado sólo por mujeres. **(0.5 puntos)**
- La probabilidad de que todas las personas del jurado sean del mismo sexo. **(1 punto)**
- La probabilidad de que haya al menos una persona de cada sexo en el jurado. **(1 punto)**

Solución:

a) $M = \text{"Un novelista es mujer"}$. $P(M \cap M \cap M) = \frac{30}{50} \frac{29}{49} \frac{28}{48} = \frac{24360}{117600} = 0.2071$ **(0.5 puntos)**

b) $H = \text{"Un novelista es hombre"}$. $P(H \cap H \cap H) = \frac{20}{50} \frac{19}{49} \frac{18}{48} = \frac{6840}{117600} = 0.0582$

$$P(\text{todas del mismo sexo}) = P((M \cap M \cap M) \cup (H \cap H \cap H)) = P(M \cap M \cap M) + P(H \cap H \cap H) = 0.2653$$

(0.5 puntos por la probabilidad de tres hombres y 0.5 por la probabilidad de la unión)

c) Se puede resolver de dos formas:

$$P(\text{al menos una persona de cada sexo}) = 1 - P(\text{todas del mismo sexo}) = 1 - 0.2653 = 0.7347 \text{ (1 punto)}$$

O bien:

$$P(2 \text{ mujeres y } 1 \text{ hombre}) = 3 * P(M \cap M \cap H) = 3 * \frac{30}{50} \frac{29}{49} \frac{20}{48} = \frac{52200}{117600} = 0.4439,$$

$$P(1 \text{ mujer y } 2 \text{ hombres}) = 3 * P(M \cap H \cap H) = 3 * \frac{30}{50} \frac{20}{49} \frac{19}{48} = \frac{34200}{117600} = 0.2908$$

$$P(\text{al menos una persona de cada sexo}) = P(2 \text{ mujeres y } 1 \text{ hombre}) + P(1 \text{ mujer y } 2 \text{ hombres}) = 0.7347$$

(0.25 por el planteamiento, 0.25 por cada probabilidad y 0.25 por la unión)

Instrucciones: Esta prueba consta de dos propuestas (A y B). Se ha de elegir una propuesta y resolver sus 4 problemas. Sólo se pueden utilizar calculadoras tipo II. Calculadoras gráficas o simbólicas no están permitidas. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

Ejercicio 1. Un centro de distribución venta online tiene una demanda semanal de productos, D , que se ajusta a la función $D(x) = 400x - 50x^2$, donde x representa el día de la semana, de lunes a domingo ($1 \leq x \leq 7$).

- Calcule qué día de la semana se demandan 600 productos. **(0.5 puntos)**
- Calcule la demanda de un domingo. **(0.5 puntos)**
- Calcule el día de la semana con mayor demanda y cuántos productos son. **(1.5 puntos)**

Solución:

a) $D(x) = 400x - 50x^2 = 600 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix}$. Luego, tanto el martes como el sábado se demandan 600 productos. **(0.5 puntos)**

b) $D(7) = 400 \cdot 7 - 50 \cdot 7^2 = 2800 - 2450 = 350$ productos. **(0.5 puntos)**

c) Para calcular el máximo hay que resolver la ecuación $D'(x) = 0$ y comprobar que es un máximo:

$$D'(x) = 400 - 100x = 0 \Rightarrow x = 4 \quad D''(4) = -100 < 0$$

Luego se alcanza el máximo el cuarto día (jueves), con un valor de $D(4) = 400 \cdot 4 - 50 \cdot 4^2 = 800$ productos.

(0.5 puntos por el extremo, 0.5 por la condición de máximo y 0.5 por el valor)

Ejercicio 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Calcula la matriz $2IA^2B$. **(1 punto)**
- Calcula, si es posible, la matriz X tal que $AX - I = C^T$. **(1.5 puntos)**

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, $2IA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 18 & 8 \end{pmatrix}$, $2IA^2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 50 & -18 & 12 \end{pmatrix}$ **(0.25 por A^2 , 0.75 por resultado final)**

b) Despejando la matriz $X = A^{-1}(C^T + I)$. $\det(A) = 2$, $\text{adj}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

$$C^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T + I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}(C^T + I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(0.5 por A^{-1} , 0.5 por $C^T + I$, y 0.5 por el resultado final)

Ejercicio 3. Una cafetería universitaria ofrece dos tipos de postres, A y B. Para el primero, utiliza 3 litros de leche y 1 kilogramo de azúcar, mientras que para el segundo utiliza 2 litros de leche y 2 kilogramos de azúcar. Ha observado que diariamente necesita al menos 2 postres del tipo A y 3 postres del tipo B, y que dispone de 24 litros de leche y 16 kilogramos de azúcar. El beneficio que obtiene por la venta por porciones de un postre de tipo A es de 15 euros, mientras que por cada postre del tipo B es de 20 euros.

- Expresa la función objetivo. **(0.5 puntos)**
- Expresa, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente la región factible. **(0.75 puntos por las restricciones y 0.5 por la región factible)**
- Calcule cuántos postres de cada tipo debe hacer para obtener el máximo beneficio. **(0.75 puntos)**

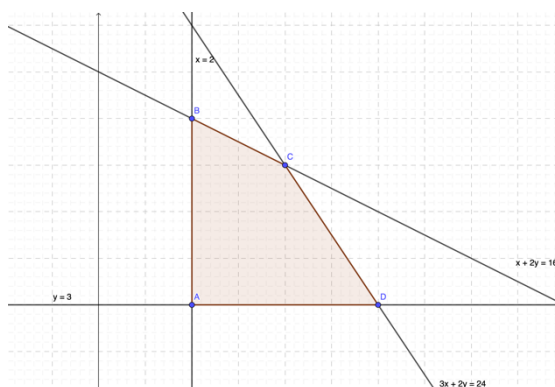
Solución:

a) El objetivo es maximizar el beneficio, o sea $\max(15A + 20B)$. **(0.5 puntos)**

b) Las restricciones del problema son:

$$\begin{aligned} A &\geq 2, \text{ necesita al menos 2 postres de tipo A} \\ B &\geq 3, \text{ necesita al menos 3 postres de tipo B} \\ 3A + 2B &\leq 24, \text{ los litros de leche suman, como máximo, 24} \\ A + 2B &\leq 16, \text{ los kilogramos de azúcar suman, como máximo, 16} \end{aligned}$$

La región factible será:



(0.75 puntos por las restricciones y 0.5 por la región factible)

c) Calculando el valor de la función beneficio en cada uno de los cuatro puntos que definen la región factible, se tiene:

$$\begin{aligned} A &= (2,3), \text{ Beneficio} = 15 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 90 \\ B &= (2,7), \text{ Beneficio} = 15 \cdot 2 + 20 \cdot 7 = 170 \\ C &= (4,6), \text{ Beneficio} = 15 \cdot 4 + 20 \cdot 6 = 180 \\ D &= (6,3), \text{ Beneficio} = 15 \cdot 6 + 20 \cdot 3 = 150 \end{aligned}$$

Luego el máximo beneficio (180) se obtiene haciendo 4 postres de tipo A y 6 de tipo B.

(0.5 puntos por los cuatro vértices y 0.25 por el cálculo del beneficio)

Ejercicio 4. Se estima que el tiempo, en minutos, de una operación ambulatoria en un centro de salud se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 12$ minutos. Se toma una muestra de 16 pacientes y se observa que la duración media en la muestra es de 25 minutos. Con un nivel de confianza del 95%,

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional. **(1 punto)**
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(respuesta correcta 0.25 y 0.5 por justificación)**
- La gerencia del centro de salud afirma que la duración media de las operaciones ambulatorias es de 32 minutos. ¿Se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(respuesta correcta 0.25 y 0.5 por justificación)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) $1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = 1.96 \sim 2$

$$I.C. (0.97) = \left[\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[25 \pm 2 \frac{12}{\sqrt{16}} \right] = [25 \pm 6] = [19; 31]$$

(0.25 por el cuantil, 0.5 por la fórmula del intervalo y 0.25 por la resolución)

b) Al no modificar el nivel de confianza, el cuantil teórico es el mismo; también lo es la desviación típica, luego sólo queda aumentar el tamaño muestral para reducir la amplitud del intervalo. **(respuesta correcta 0.25 y 0.5 por justificación)**

c) El valor $\mu = 32$ no está dentro del intervalo de confianza al 95%. Por tanto, no se puede aceptar la afirmación de que $\mu = 32$. **(respuesta correcta 0.25 y 0.5 por justificación)**