



PAU (MAIORES DE 25 ANOS)

Código: 42

2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.**

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Determine para qué valores de m existe la matriz inversa de A .
 - Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para $m = 1$.
2. Un canal de televisión sabe que el porcentaje de personas que ven dicho canal entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función $S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$, donde t son las horas transcurridas desde las 12 de la mañana
- ¿A qué hora este canal tiene su máximo y mínimo de audiencia entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche?
 - ¿Qué porcentaje de personas ve el canal en esas horas de máxima y mínima audiencia?
 - Dibuja la gráfica de la función $S(t)$ para t entre las 6 pm y las 12 pm.
3. Una compañía telefónica ofrece tres tipos de tarifas: A, B y C, estando abonados el 45%, 30% y 25% de los clientes a cada una de ellas, respectivamente. Se detecta que el 3%, el 5% y el 1% de los abonados a la tarifa A, B y C, respectivamente, cancelan su contrato una vez finalizado el período de permanencia. Se elige un cliente al azar:
- Si cancela su contrato, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera en la tarifa C?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el contrato no se cancele después del período de permanencia?
 - Calcule la probabilidad de que sea abonado de la tarifa A y decida cancelar el contrato, transcurrido el periodo de permanencia.

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 si la respuesta es incorrecta.

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa si

- $k \neq -1$
 - $k \neq 1$
 - $k \neq 1$ y $k \neq -1$
2. La derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 1/2$ vale
- 8
 - 1/2
 - 2
3. La función $f(x) = \frac{18 + x^2}{(x + 3)^2}$ representa el número de individuos, en millones, de una población (x es el tiempo, en años, desde $x=0$). El tamaño de la población a largo plazo (cuando x tiende a infinito) será
- 1
 - 18

c) $+\infty$

4. Sean A y B dos sucesos aleatorios con $P(B) = P(\bar{A}) = 0,6$ y $P(A \cap B) = 0,3$. Entonces

a) $P(A \cup B) = 0,4$

b) $P(A \cup B) = 0,9$

c) $P(A \cup B) = 0,7$

SOLUCIONES**PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.**

$$1. \text{ Dadas las matrices } A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine para qué valores de m existe la matriz inversa de A .
 b) Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para $m = 1$.

- a) Para que exista la inversa de A su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2m + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

Existe la inversa de A cuando $m \neq 0$.

- b) Despejamos X en la ecuación $X \cdot A + B = C$.

$$X \cdot A + B = C \Rightarrow X \cdot A = C - B \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$$

Hallamos la inversa de la matriz A para $m = 1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 16-8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X .

$$X = (C - B)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 2+1+0 & -4-4-1 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0-4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

2. Un canal de televisión sabe que el porcentaje de personas que ven dicho canal entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función $S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$, donde t son las horas transcurridas desde las 12 de la mañana

- a) ¿A qué hora este canal tiene su máximo y mínimo de audiencia entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche?
 b) ¿Qué porcentaje de personas ve el canal en esas horas de máxima y mínima audiencia?
 c) Dibuja la gráfica de la función $S(t)$ para t entre las 6 pm y las 12 pm.

a) La función tiene su dominio entre las 6 de la tarde ($t = 6$) y las 12 de la noche ($t = 12$).

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3, \text{ siendo } t \in [6, 12]$$

Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \Rightarrow S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 \left\{ \begin{array}{l} S'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -231 + 54t - 3t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 18t + 77 = 0 \Rightarrow t = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 77}}{2} = \frac{18 \pm 4}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{18+4}{2} = 11 = t \\ \frac{18-4}{2} = 7 = t \end{array} \right.$$

Hemos obtenido dos puntos críticos: $t = 7$ y $t = 11$. Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 \Rightarrow S''(t) = 54 - 6t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S''(7) = 54 - 6 \cdot 7 = 12 > 0 \\ S''(11) = 54 - 6 \cdot 11 = -12 < 0 \end{array} \right.$$

La función presenta un mínimo relativo en $t = 7$ y un máximo relativo en $t = 11$.
 Valoramos la función en estos puntos críticos y en los extremos del intervalo de definición.

$$S(6) = 660 - 231 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 - 6^3 = 30$$

$$S(7) = 660 - 231 \cdot 7 + 27 \cdot 7^2 - 7^3 = 23 \text{ Mínimo}$$

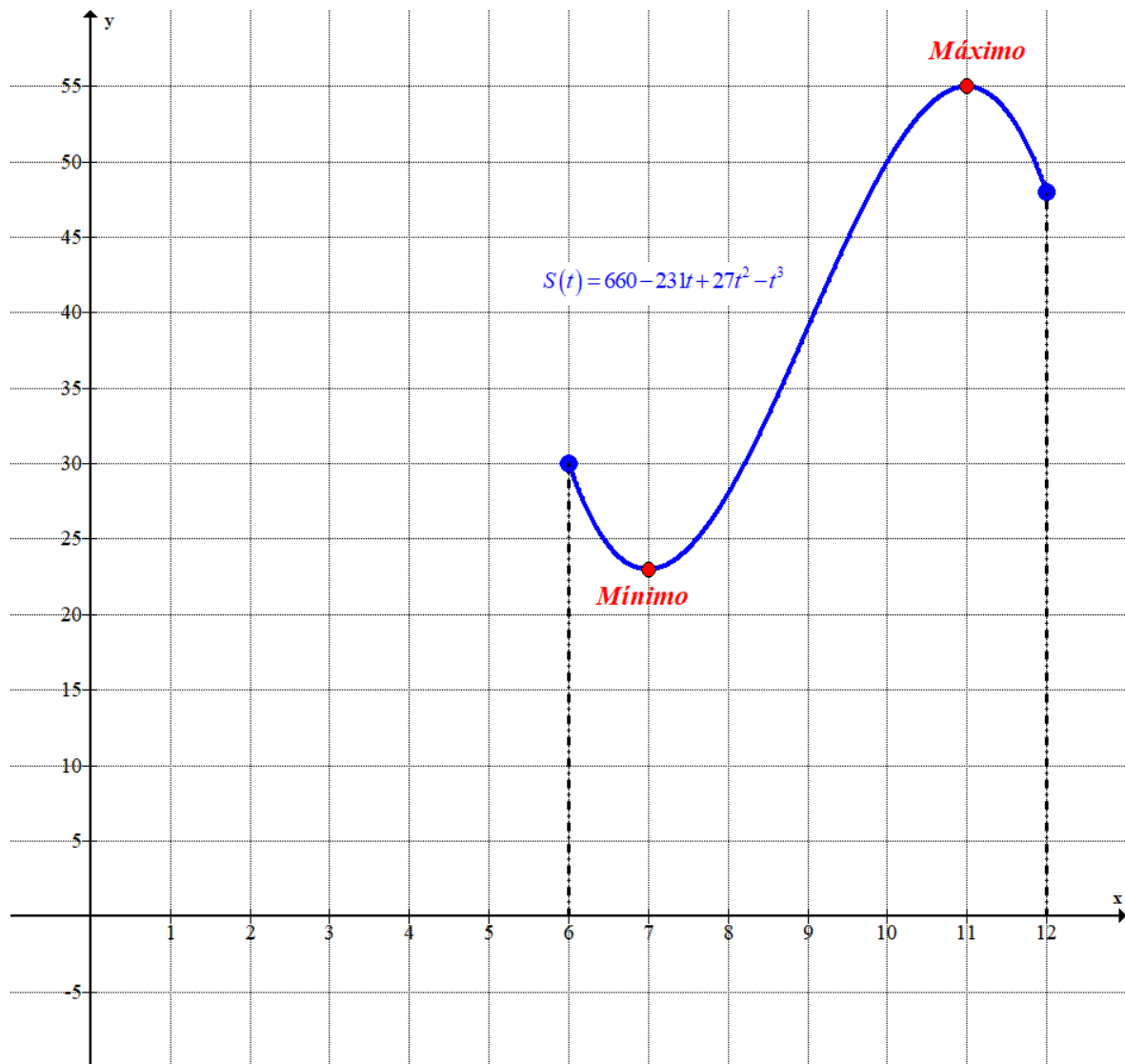
$$S(11) = 660 - 231 \cdot 11 + 27 \cdot 11^2 - 11^3 = 55 \text{ Máximo}$$

$$S(12) = 660 - 231 \cdot 12 + 27 \cdot 12^2 - 12^3 = 48$$

El valor mínimo de audiencia es el 23% que se produce a las 7 de la tarde y el valor máximo de audiencia es el 55% que se obtiene a las 11 de la noche.

- b) El valor mínimo de audiencia es el 23% que se produce a las 7 de la tarde y el valor máximo de audiencia es el 55% que se obtiene a las 11 de la noche.
 c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

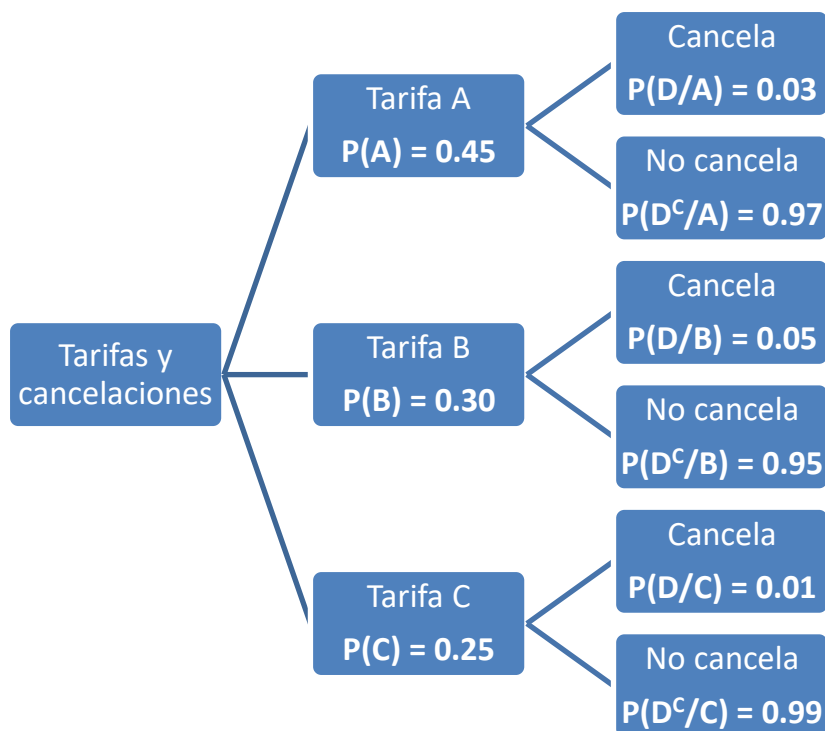
t	$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$
6	30
7	23
11	55
12	48



3. Una compañía telefónica ofrece tres tipos de tarifas: A, B y C, estando abonados el 45%, 30% y 25% de los clientes a cada una de ellas, respectivamente. Se detecta que el 3%, el 5% y el 1% de los abonados a la tarifa A, B y C, respectivamente, cancelan su contrato una vez finalizado el período de permanencia. Se elige un cliente al azar:

- Si cancela su contrato, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera en la tarifa C?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el contrato no se cancele después del período de permanencia?
- Calcule la probabilidad de que sea abonado de la tarifa A y decida cancelar el contrato, transcurrido el periodo de permanencia.

Llamamos A, B y C a los sucesos “El cliente tiene tarifa A, B o C”. Llamamos D al suceso “el cliente cancela el contrato”. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(C/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.45 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.01} = \boxed{\frac{5}{62} \approx 0.0806}$$

- b) Debemos calcular $P(D^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D^c) = P(A)P(D^c/A) + P(B)P(D^c/B) + P(C)P(D^c/C) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.97 + 0.3 \cdot 0.95 + 0.25 \cdot 0.99 = \boxed{0.969}$$

- c) Debemos calcular $P(A \cap D)$.

$$P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = 0.45 \cdot 0.03 = \boxed{0.0135}$$

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 si la respuesta es incorrecta.

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa si

- a) $k \neq -1$
- b) $k \neq 1$
- c) $k \neq 1$ y $k \neq -1$

Para que tenga inversa debe tener determinante no nulo. Determinamos la expresión del determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + \cancel{k^2} - 0 - \cancel{k^2} - k^2 = 1 - k^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \sqrt{1} = \pm 1$$

La matriz A tiene inversa si $k \neq 1$ y $k \neq -1$. La respuesta correcta es c)

2. La derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 1/2$ vale

- a) -8
- b) 1/2
- c) -2

Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{x^2}$$

La derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x = 1/2$ vale $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{1}{4}} = -8$.

La respuesta correcta es la a).

3. La función $f(x) = \frac{18 + x^2}{(x+3)^2}$ representa el número de individuos, en millones, de una población (x

es el tiempo, en años, desde $x=0$). El tamaño de la población a largo plazo (cuando x tiende a infinito) será

- a) 1
- b) 18
- c) $+\infty$

Debemos calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18+x^2}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18+x^2}{x^2+9+6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La respuesta correcta es la a).

4. Sean A y B dos sucesos aleatorios con $P(B) = P(\bar{A}) = 0,6$ y $P(A \cap B) = 0,3$. Entonces

- a) $P(A \cup B) = 0,4$
- b) $P(A \cup B) = 0,9$
- c) $P(A \cup B) = 0,7$

Como $P(\bar{A}) = 0,6$ entonces $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

Calculamos la probabilidad de la unión de los dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,6 - 0,3 = 0,7.$$

La respuesta correcta es la c).