



PAU (MAIORES DE 25 ANOS)

Código: 42

2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**PROBLEMAS (hasta 2 puntos cada problema):**

1. Calcule $B = A^2 - AA^T$ si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Luego, diga para qué valores de α la matriz B es invertible.
2. En los 80 días que dura la recolección, se recogen en un cierto cerezal una cantidad de cerezas que, en kg, viene dada por la función

$$C(t) = 40000 + 2700t - 60t^2 + \frac{t^3}{3}, \quad 1 \leq t \leq 80,$$
 donde t indica el tiempo en días. Responda a los dos apartados siguientes:
 - a) ¿Cuántos kg de cerezas se recogen el primer día? ¿Y el último? ¿Cuál es el día de recolección máxima?
 - b) Represente gráficamente la función C .
3. Un 95% de los habitantes de una cierta ciudad no viajan en taxi más de diez veces al año y un 40% de los que sí lo hacen también comen fuera de casa más de treinta veces al año. Si se elige al azar un habitante de esa ciudad, calcule la probabilidad de que viaje en taxi más de diez veces al año y coma fuera de casa más de treinta veces al año.

CUESTIONES (se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 puntos si la respuesta es incorrecta):

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces
 - a) $A + I$ es invertible para todo valor de α .
 - b) A puede ser invertible para algún valor de α .
 - c) $A - I$ es invertible si $\alpha \neq 0$.
2. La derivada de la función $f(x) = x \ln x$ en $x = e$ es
 - a) 1
 - b) 0
 - c) 2
3. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$
 - a) tiene un extremo relativo en $x = 1$.
 - b) tiene un punto de inflexión en $x = 1$.
 - c) tiene límite 0 cuando x tiende a infinito.
4. Sean A y B sucesos aleatorios tales que $P(A \cup B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 2P(A)$. Entonces,
 - a) $P(A) = 0,3$
 - b) $P(A) = 0,4$
 - c) $P(B) = 0,5$

SOLUCIONES**PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.**

1. Calcule $B = A^2 - AA^T$ si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Luego, diga para qué valores de α la matriz B es invertible.

Determinamos la expresión de la matriz B.

$$\begin{aligned}
 B = A^2 - AA^T &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2 & \alpha + 3 \\ 2\alpha + 6 & 2 + 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 & 2\alpha + 3 \\ 2\alpha + 3 & 4 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2 - \alpha^2 - 1 & \alpha + 3 - 2\alpha - 3 \\ 2\alpha + 6 - 2\alpha - 3 & 11 - 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 3 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La matriz B es invertible cuando su determinante es no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante de B.

$$\left. \begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3\alpha \\ |B| &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 + 3\alpha = 0 \Rightarrow 3\alpha = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

La matriz B tiene inversa para cualquier valor $\alpha \neq \frac{2}{3}$.

2. En los 80 días que dura la recolección, se recogen en un cierto cerezal una cantidad de cerezas que, en kg, viene dada por la función

$$C(t) = 40000 + 2700t - 60t^2 + \frac{t^3}{3}, \quad 1 \leq t \leq 80,$$

donde t indica el tiempo en días. Responda a los dos apartados siguientes:

- a) ¿Cuántos kg de cerezas se recogen el primer día? ¿Y el último? ¿Cuál es el día de recolección máxima?
b) Represente gráficamente la función C .

a) Nos piden calcular $C(1)$.

$$C(1) = 40000 + 2700 \cdot 1 - 60 \cdot 1^2 + \frac{1^3}{3} = 42640.33$$

El primer día se recogen 42640.33 kg de cerezas.

También nos piden calcular $C(80)$.

$$C(80) = 40000 + 2700 \cdot 80 - 60 \cdot 80^2 + \frac{80^3}{3} = 42666.66$$

El último día se recogen 42666.66 kg de cerezas.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$C(t) = 40000 + 2700t - 60t^2 + \frac{t^3}{3} \Rightarrow C'(t) = 2700 - 120t + t^2 \left. \begin{array}{l} \\ C'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2700 - 120t + t^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{120 \pm \sqrt{(-120)^2 - 4 \cdot 2700}}{2} = \frac{120 \pm 60}{2} = \begin{cases} \frac{120 + 60}{2} = 90 \notin [1, 80] \\ \frac{120 - 60}{2} = 30 \in [1, 80] \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en el punto crítico $t = 30$.

$$C(1) = 42640.33$$

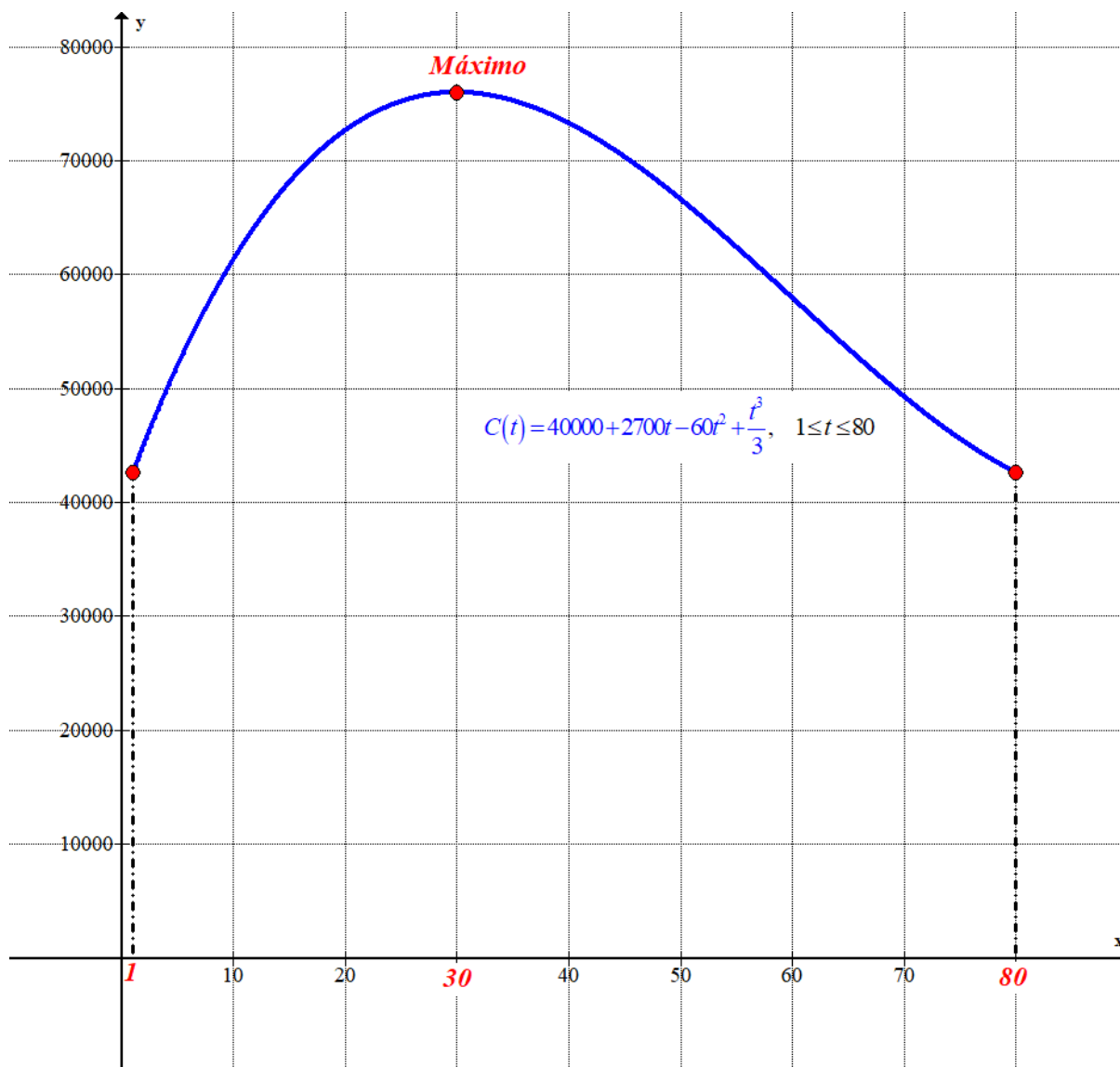
$$C(30) = 40000 + 2700 \cdot 30 - 60 \cdot 30^2 + \frac{30^3}{3} = 76000 \text{ Máximo}$$

$$C(80) = 42666.66$$

Como la función es continua sabemos que crece del día 1 al día 30 y luego decrece hasta el día 80. El día de recolección máxima es el día 30 que se recolectan 76000 kg de cerezas.

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$C(t) = 40000 + 2700t - 60t^2 + \frac{t^3}{3}$
1	42640.33
30	76000
50	66666.66
80	42666.66



3. Un 95% de los habitantes de una cierta ciudad no viajan en taxi más de diez veces al año y un 40% de los que sí lo hacen también comen fuera de casa más de treinta veces al año. Si se elige al azar un habitante de esa ciudad, calcule la probabilidad de que viaje en taxi más de diez veces al año y coma fuera de casa más de treinta veces al año.

Llamamos T al suceso “un habitante de cierta ciudad viaja en taxi más de diez veces al año” y C a “un habitante de cierta ciudad come fuera de casa más de treinta veces al año”.

Sabemos que $P(\bar{T}) = 0.95$, por lo que $P(T) = 1 - P(\bar{T}) = 1 - 0.95 = 0.05$.

También sabemos que $P(C/T) = 0.40$.

Nos piden calcular $P(T \cap C)$.

$$P(T \cap C) = P(T)P(C/T) = 0.05 \cdot 0.40 = 0.02$$

La probabilidad de que viaje en taxi más de diez veces al año y coma fuera de casa más de treinta veces al año es de 0.02.

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 si la respuesta es incorrecta.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

- a) $A + I$ es invertible para todo valor de α .
- b) A puede ser invertible para algún valor de α .
- c) $A - I$ es invertible si $\alpha \neq 0$.

La respuesta b) es incorrecta pues la matriz A tiene la segunda columna nula y por tanto su determinante es nulo. La matriz A no tiene inversa para ningún valor de α .
Obtenemos la expresión de la matriz $A + I$ y calculamos su determinante.

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

La matriz $A + I$ tiene inversa para todo valor de α .
Comprobamos que la respuesta c) es incorrecta.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz $A - I$ no es invertible para ningún valor de α . La respuesta c) es incorrecta.

La respuesta correcta es la a).

2. La derivada de la función $f(x) = x \ln x$ en $x = e$ es

- a) 1
- b) 0
- c) 2

Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x$$

La derivada de la función $f(x) = x \ln x$ en $x = e$ es vale $f'(e) = 1 + \ln e = 2$.

La respuesta correcta es la c).

3. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$
- a) tiene un extremo relativo en $x = 1$.
- b) tiene un punto de inflexión en $x = 1$.
- c) tiene límite 0 cuando x tiende a infinito.

Para que la función tiene un extremo relativo en $x = 1$ la derivada debe anularse para este valor.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -2 \neq 0$$

La respuesta a) es incorrecta.

Si la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$ debe anularse la segunda derivada para este valor.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$$

Además, la derivada tercera debe tener valor no nulo.

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

La respuesta correcta es la b).

La respuesta c) es incorrecta pues la función tiene límite infinito cuando x tiende a infinito

4. Sean A y B sucesos aleatorios tales que $P(A \cup B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 2P(A)$. Entonces,
- a) $P(A) = 0,3$
- b) $P(A) = 0,4$
- c) $P(B) = 0,5$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de los dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.7 = P(A) + 2P(A) - 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.9 = 3P(A) \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{0.9}{3} = 0.3}$$

Por lo que $P(B) = 2P(A) = 2 \cdot 0.3 = 0.6$.

Las respuestas b) y c) son incorrectas y la respuesta correcta es la a).