

|                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                     |               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
|  | <b>UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID</b><br><b>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD</b><br><b>PARA MAYORES DE 25 AÑOS</b><br><b>CONVOCATORIA 2024</b><br><b>MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II</b> | <b>MODELO</b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|

### INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

**CALIFICACION:** Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos

### OPCIÓN A

**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcule, si es posible, la matriz  $A \cdot B$ .
- Calcule una matriz  $X$  tal que  $X \cdot A \cdot B = Id$ , donde  $Id$  denota la matriz identidad de orden 2.

**Ejercicio 2.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea  $S$  la región del plano definida por:

$$-x + y \leq 2; \quad x + 2y \geq 4; \quad x \leq 2.$$

- Represente la región  $S$  y calcule las coordenadas de sus vértices.
- Obtenga los valores máximo y mínimo de la función  $f(x, y) = x + y$  en  $S$ , indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

**Ejercicio 3.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real  $f(x) = (1-x)e^{x+1}$ .

- Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = -1$ .
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

**Ejercicio 4.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean  $A$  y  $B$  sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0.7 \quad P(B) = 0.4 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} | B) = 0.25$$

Calcule:

- $P(A \cap B)$ .
- $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ .

Nota:  $\bar{S}$  denota el suceso complementario de  $S$ .

**Ejercicio 5.** (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en kilogramos (kg) de residuos plásticos que genera anualmente cada español se puede aproximar con una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  kg y desviación típica  $\sigma = 5$  kg.

- a) En un reciente estudio se ha obtenido, para una muestra de 100 personas, el intervalo de confianza  $I = [33'785, 36'215]$ . Calcule la media muestral  $\bar{x}$  y el nivel de confianza utilizado.
- b) Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 400 para el mismo nivel de confianza.

### OPCIÓN B

#### Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\left. \begin{aligned} 2x - y - z &= 1 \\ x + y + az &= 2 \\ -2x - y + z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro  $a$ .
- b) Resuelva, si es posible, el sistema para  $a = 0$ .

#### Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea  $f(x)$  una función real de variable real tal que su función derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .
- b) Determine la función  $f(x)$  sabiendo que  $f(1) = 0$ .

#### Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 1}.$$

- a) Determine su dominio y sus asíntotas, si las tiene.
- b) Calcule su función derivada,  $f'(x)$ .

#### Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio. Se conoce que:

$$P(A) = 0'6 \quad P(B) = 0'4 \quad \text{y} \quad P(A|B) = 0'5$$

Calcule:

- a)  $P(A \cap B)$ .
- b)  $P(A/\bar{B})$ .

Nota:  $\bar{S}$  denota el suceso complementario de S.

#### Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo diario en minutos (min) que los usuarios en España de una de las principales plataformas digitales dedican a ver series y películas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  min y desviación típica  $\sigma = 20$  min.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 usuarios. Calcule con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 4'34 minutos.
- b) Con una muestra aleatoria de 400 usuarios se ha obtenido un tiempo medio diario de  $\bar{x} = 100$  minutos. Obtenga el intervalo de confianza del 93% para  $\mu$ .

**SOLUCIONES****OPCIÓN A****Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule, si es posible, la matriz  $A \cdot B$ .

b) Calcule una matriz  $X$  tal que  $X \cdot A \cdot B = Id$ , donde  $Id$  denota la matriz identidad de orden 2.

a) Realizamos el producto de matrices pedido.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1-0 & 1+1-1 \\ 1+1+0 & 1-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

b) Despejamos  $X$  de la ecuación matricial.

$$X \cdot A \cdot B = Id \Rightarrow X = Id \cdot (A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$$

Hallamos la inversa de la matriz  $A \cdot B$ .

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj((A \cdot B)^T)}{|A \cdot B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{0-2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz  $X$  solución de la ecuación matricial  $X \cdot A \cdot B = Id$  es  $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 2.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$-x + y \leq 2; \quad x + 2y \geq 4; \quad x \leq 2.$$

- a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.  
 b) Obtenga los valores máximo y mínimo de la función  $f(x, y) = x + y$  en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

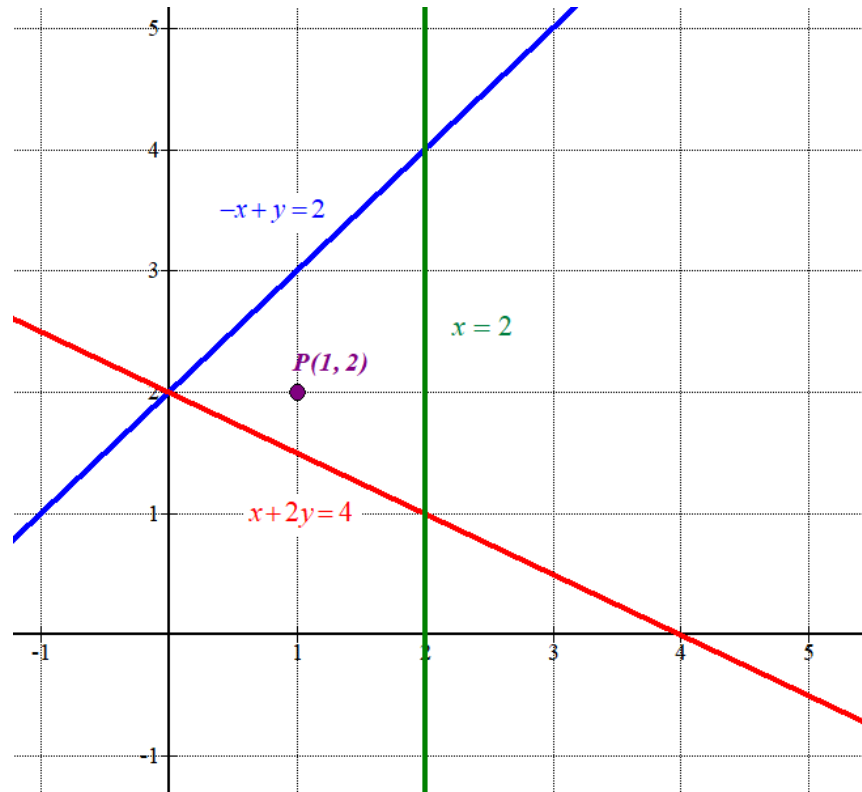
$$-x + y = 2$$

| x | y = 2 + x |
|---|-----------|
| 0 | 2         |
| 2 | 4         |

$$x + 2y = 4$$

| x | y = $\frac{4-x}{2}$ |
|---|---------------------|
| 0 | 2                   |
| 2 | 1                   |

| x = 2 | y |
|-------|---|
| 2     | 1 |
| 2     | 4 |

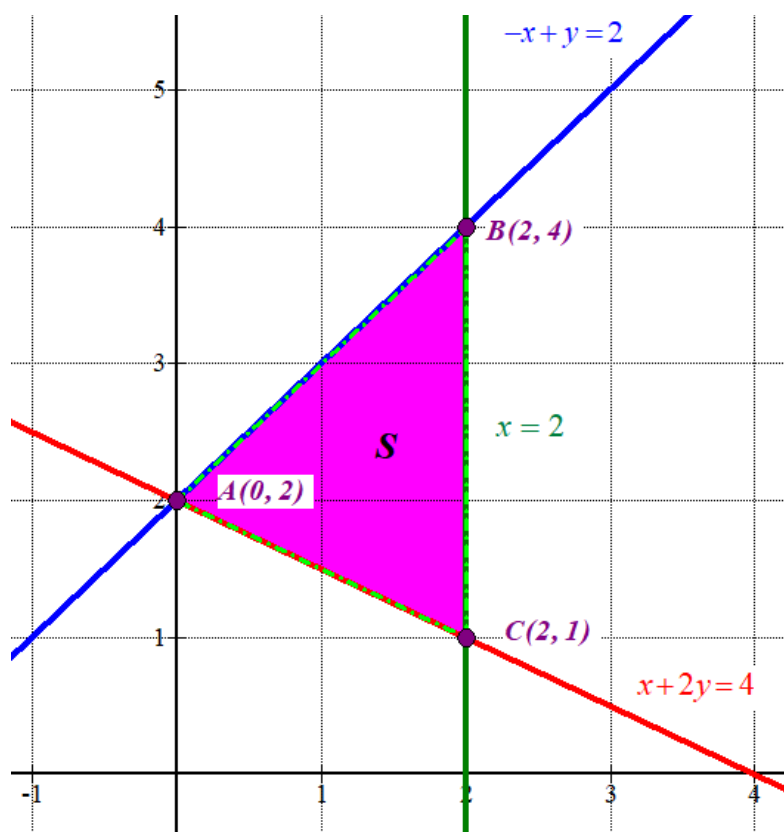


La región S es la región del plano situada por debajo de la recta azul, por encima de la recta roja y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto  $P(1, 2)$  perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$-1 + 2 \leq 2; \quad 1 + 2 \cdot 2 \geq 4; \quad 1 \leq 2 \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



b) Valoramos la función  $f(x, y) = x + y$  en cada vértice en busca de su valor máximo y mínimo.

- $A(0, 2) \rightarrow f(0, 2) = 0 + 2 = 2$  ¡Mínimo!
- $B(2, 4) \rightarrow f(2, 4) = 2 + 4 = 6$  ¡Máximo!
- $C(2, 1) \rightarrow f(2, 1) = 2 + 1 = 3$

La función  $f(x, y) = x + y$  alcanza un máximo valor de 6 en el punto  $B(2, 4)$  y un mínimo valor de 2 en el punto  $A(0, 2)$ .

**Ejercicio 3.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real  $f(x) = (1-x)e^{x+1}$ .

- a) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = -1$ .  
 b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

- a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = -1$  es  
 $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$ .

$$f(x) = (1-x)e^{x+1} \Rightarrow f'(x) = (-1)e^{x+1} + (1-x)e^{x+1} = -xe^{x+1} \Rightarrow f'(-1) = -(-1)e^{-1+1} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \\ f(-1) = (1-(-1))e^{-1+1} = 2 \\ f'(-1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = 1(x+1) \Rightarrow \boxed{y = x + 3}$$

La recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = -1$  tiene la ecuación  $y = x + 3$ .

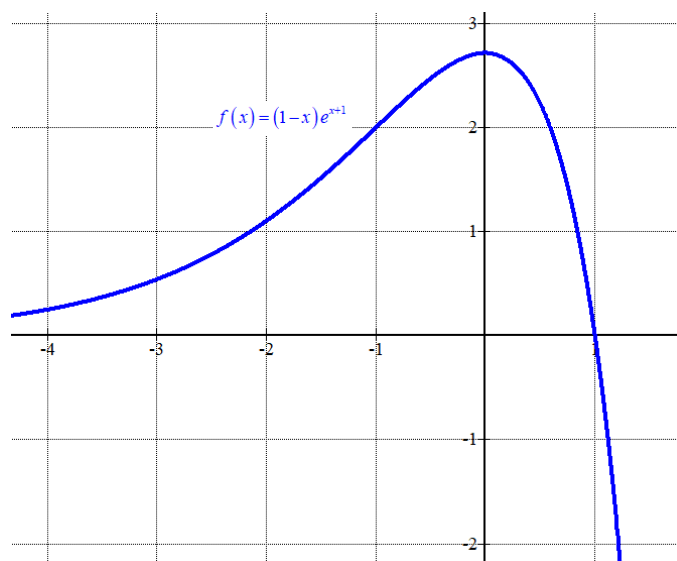
- b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -xe^{x+1} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -xe^{x+1} = 0 \Rightarrow \{e^{x+1} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico  $x = 0$ .

- En el intervalo  $(-\infty, 0)$  tomamos  $x = -1$  y la derivada vale  $f'(-1) = -(-1)e^{-1+1} = 1 > 0$ . La función crece en  $(-\infty, 0)$ .
- En el intervalo  $(0, +\infty)$  tomamos  $x = 1$  y la derivada vale  $f'(1) = -1 \cdot e^{1+1} = -e^2 < 0$ . La función decrece en  $(0, +\infty)$ .

La función crece en  $(-\infty, 0)$  y decrece en  $(0, +\infty)$ .



**Ejercicio 4.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0.7 \quad P(B) = 0.4 \quad \text{y} \quad P(\bar{A}|B) = 0.25$$

Calcule:

a)  $P(A \cap B)$ .

b)  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ .

Nota:  $\bar{S}$  denota el suceso complementario de S.

a) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.25 = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{0.4} \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0.25 \cdot 0.4 = 0.1$$

Utilizamos la fórmula  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ .

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \Rightarrow 0.4 = P(A \cap B) + 0.1 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.3}$$

b) Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.3 = \boxed{0.7}$$

**Ejercicio 5.** (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en kilogramos (kg) de residuos plásticos que genera anualmente cada español se puede aproximar con una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  kg y desviación típica  $\sigma = 5$  kg.

- a) En un reciente estudio se ha obtenido, para una muestra de 100 personas, el intervalo de confianza  $I = [33'785, 36'215]$ . Calcule la media muestral  $\bar{x}$  y el nivel de confianza utilizado.
- b) Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 400 para el mismo nivel de confianza.

$X$  = El peso en kg de residuos plásticos que genera anualmente cada español.  $X = N(\mu, 5)$

- a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{33.785 + 36.215}{2} = 35 \text{ kilogramos}$$

El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{36.125 - 33.785}{2} = 1.215$$

El tamaño de la muestra =  $n = 100$ . Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de  $z_{\alpha/2}$ .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.215 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} \Rightarrow 1.215 = z_{\alpha/2} \cdot 0.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.215}{0.5} = 2.43$$

Usamos la tabla de la normal para obtener el nivel de confianza que nos proporciona un valor de  $z_{\alpha/2} = 2.43$ .

$$z_{\alpha/2} = 2.43 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9925 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9925 = 0.0075 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.0075 = 0.0150 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.985$$

El nivel de confianza con que se ha establecido el intervalo de confianza es del 98.5%.

- b) Tamaño de la muestra =  $n = 400$ . Para un nivel de confianza del 98.5% el valor de  $z_{\alpha/2}$  es 2.43.

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{5}{\sqrt{400}} = 0.6075$$

El error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 400 para el mismo nivel de confianza es de 0.6075 kg.

| z   | .00    | .01    | .02    | .03    | .04    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9250 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9874 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9903 |
| 2,4 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 |

**OPCIÓN B****Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ x + y + az = 2 \\ -2x - y + z = -1 \end{array} \right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro  $a$ .

b) Resuelva, si es posible, el sistema para  $a = 0$ .

a) La matriz de coeficientes  $A$  asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de  $A$  es  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2a + 1 - 2 + 1 + 2a = 4a + 2.$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 4a + 2 = 0 \Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

**CASO 1.**  $a \neq \frac{-1}{2}$

En este caso el determinante de  $A$  es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

**CASO 2.**  $a = \frac{-1}{2}$

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de  $A$  y  $A/B$  usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad -1 \quad 4 \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 3 \cdot \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc} & \overbrace{2 \quad -1 \quad -1 \quad 1}^{A/B} & & \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.  
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

b) Para  $a = 0$  el sistema es compatible determinado (CASO 1).

Lo resolvemos

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ x + y = 2 \\ -2x - y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ y = 2 - x \\ -2x - y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - (2 - x) - z = 1 \\ -2x - (2 - x) + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 2 + x - z = 1 \\ -2x - 2 + x + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - z = 3 \\ -x + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - z = 3 \\ z = 1 + x \end{array} \right\} \Rightarrow 3x - (1 + x) = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 1 - x = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 2 - 2 = 0} \\ \boxed{z = 1 + 2 = 3} \end{array} \right.$$

La solución del sistema para  $a = 0$  es  $x = 2$ ;  $y = 0$ ,  $z = 3$ .

**Ejercicio 2.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea  $f(x)$  una función real de variable real tal que su función derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .  
 b) Determine la función  $f(x)$  sabiendo que  $f(1) = 0$ .

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo  $(-\infty, -1)$  tomamos  $x = -2$  y la derivada vale  $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$ . La función crece en  $(-\infty, -1)$ .
- En el intervalo  $(-1, 1)$  tomamos  $x = 0$  y la derivada vale  $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$ . La función decrece en  $(-1, 1)$ .
- En el intervalo  $(1, +\infty)$  tomamos  $x = 2$  y la derivada vale  $f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0$ . La función crece en  $(1, +\infty)$ .

La función crece en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  y decrece en  $(-1, 1)$ .

b) La función  $f(x)$  se obtiene como la primitiva de la función derivada.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3x^2 - 3 dx = x^3 - 3x + K$$

Determinamos el valor de  $K$  sabiendo que  $f(1) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) = x^3 - 3x + K \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1^3 - 3 \cdot 1 + K \Rightarrow 0 = -2 + K \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

La función  $f(x)$  tiene la expresión  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ .

**Ejercicio 3.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 1}.$$

a) Determine su dominio y sus asíntotas, si las tiene.

b) Calcule su función derivada,  $f'(x)$ .

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

**Asíntota vertical.**  $x = a$ ¿ $x = -1$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^3 - 1}{-1 + 1} = \frac{-2}{0} = \infty$$

 $x = -1$  es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.**  $y = b$ 

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

**Asíntota oblicua.**  $y = mx + n$ 

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 1}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x + 1) - 1 \cdot (x^3 - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3 + 1}{(x + 1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(x + 1)^2}$$

**Ejercicio 4.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio. Se conoce que:

$$P(A) = 0.6 \quad P(B) = 0.4 \quad \text{y} \quad P(A|B) = 0.5$$

Calcule:

a)  $P(A \cap B)$ .

b)  $P(A/\bar{B})$ .

Nota:  $\bar{S}$  denota el suceso complementario de S.

a) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A|B) = 0.5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.4} = 0.5 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2}$$

b) Utilizamos la fórmula  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ .

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0.6 = 0.2 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.4$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{0.4}{1 - 0.4} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.6667}$$

**Ejercicio 5.** (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo diario en minutos (min) que los usuarios en España de una de las principales plataformas digitales dedican a ver series y películas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  min y desviación típica  $\sigma = 20$  min.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 usuarios. Calcule con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 4'34 minutos.

b) Con una muestra aleatoria de 400 usuarios se ha obtenido un tiempo medio diario de  $\bar{x} = 100$  minutos. Obtenga el intervalo de confianza del 93% para  $\mu$ .

Consideramos  $X =$  El tiempo diario en minutos (min) que los usuarios en España de una de las principales plataformas digitales dedican a ver series y películas.  $X = N(\mu, 20)$ .

a) Tamaño de la muestra =  $n = 100$ .

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de  $z_{\alpha/2}$ .

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4.34 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \Rightarrow 4.34 = z_{\alpha/2} \cdot 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{4.34}{2} = 2.17$$

Usamos la tabla de la normal para obtener el nivel de confianza que nos proporciona un valor de  $z_{\alpha/2} = 2.17$ .

$$z_{\alpha/2} = 2.17 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.985 = 0.015 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.97$$

| z   | ,00    | ,01    | ,02    | ,03    | ,04    | ,05    | ,06    | ,07    | ,08    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5715 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6481 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7191 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7824 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9831 | 0,9836 | 0,9841 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9858 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 |

El nivel de confianza es del 97%.

b) Para un nivel de confianza del 93% hallamos el valor de  $z_{\alpha/2}$ .

$$1 - \alpha = 0.93 \Rightarrow \alpha = 0.07 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.035 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.965 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$

| z          | ,00    | <b>,01</b>    | ,0 |
|------------|--------|---------------|----|
| 0,0        | 0,5000 | 0,5040        | 0, |
| 0,1        | 0,5398 | 0,5438        | 0, |
| 0,2        | 0,5793 | 0,5832        | 0, |
| 0,3        | 0,6179 | 0,6217        | 0, |
| 0,4        | 0,6554 | 0,6591        | 0, |
| 0,5        | 0,6915 | 0,6950        | 0, |
| 0,6        | 0,7257 | 0,7291        | 0, |
| 0,7        | 0,7580 | 0,7611        | 0, |
| 0,8        | 0,7881 | 0,7910        | 0, |
| 0,9        | 0,8159 | 0,8186        | 0, |
| 1,0        | 0,8413 | 0,8438        | 0, |
| 1,1        | 0,8643 | 0,8665        | 0, |
| 1,2        | 0,8849 | 0,8869        | 0, |
| 1,3        | 0,9032 | 0,9049        | 0, |
| 1,4        | 0,9192 | 0,9207        | 0, |
| 1,5        | 0,9332 | 0,9345        | 0, |
| 1,6        | 0,9452 | 0,9463        | 0, |
| 1,7        | 0,9554 | 0,9564        | 0, |
| <b>1,8</b> | 0,9641 | <b>0,9649</b> | 0, |
| 1,9        | 0,9713 | 0,9719        | 0, |

Obtenemos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{20}{\sqrt{400}} = 1.81$$

Obtenemos el intervalo de confianza.

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (100 - 1.81, 100 + 1.81) = (98.19, 101.81)$$