

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA LOS MAYORES DE 25 AÑOS AÑO 2024 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir **una** de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente **a los cuatro ejercicios** de que consta la opción elegida. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

PUNTUACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: 1 Hora y 30 minutos

OPCIÓN A**Ejercicio 1.** (3 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + my + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}.$$

- Estúdiase la compatibilidad del sistema en función de los valores de m .
- Resuélvase el sistema para $m = 0$.
- Resuélvase el sistema para $m = 1$.

Ejercicio 2. (2,5 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 3x$.

- Determinense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y sus mínimos relativos.
- Obtégase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 3. (2 puntos) De una plantilla formada por 4 hombres y 6 mujeres se elige al azar una pareja para participar en determinado proyecto.

- Calcúlese la probabilidad de que las dos personas elegidas sean mujeres.
- Calcúlese la probabilidad de que al menos una persona elegida sea hombre.
- Calcúlese la probabilidad de que las dos personas elegidas sean del mismo sexo.
- Calcúlese la probabilidad de que las dos personas elegidas sean del mismo sexo sabiendo que una de ellas es una mujer.

Ejercicio 4. (2,5 puntos)

Una muestra aleatoria simple de 16 jóvenes de entre 18 y 25 años proporciona los siguientes tiempos de uso diario del teléfono móvil (en horas):

4 5 4'5 5 6 3 5'5 4 6 3'5 4'5 2 4 5 3 5

- Calcúlese la media y la mediana de la muestra.
- El tiempo de uso diario del móvil por jóvenes de 18 a 25 años se puede aproximar por una distribución normal de media μ horas y desviación típica 4 horas. Para la muestra de tamaño 16 anterior, determínese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de uso diario de móvil.

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (2,5 puntos)

Represéntese gráficamente la región S del plano definida por las inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 5 \\ 2x \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Calcúlese el máximo de la función $f(x, y) = 3x + 2y$ sobre los puntos de S.

Ejercicio 2. (3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x^4 + 2x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 + 2}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Estúdiese la continuidad de f en su dominio.
- b) Determinénse las asíntotas oblicuas de f , si existen.
- c) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Ejercicio 3. (2 puntos)

Un hotel admite reservas para tres tipos de habitaciones. El 30% de las reservas son para habitaciones individuales, el 50% para habitaciones dobles y el 20% para habitaciones familiares. La probabilidad de que una reserva se cancele es de 0'2 para las habitaciones individuales, de 0'1 para las dobles y de 0'3 para las familiares.

- a) Calcúlese la probabilidad de que una reserva elegida al azar sea cancelada.
- b) Sabiendo que la reserva ha sido cancelada, determínese la probabilidad de que fuera para una habitación individual.

Ejercicio 4. (2,5 puntos)

La altura de los individuos de cierta especie (en cm) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 50 cm y desviación típica 5 cm.

- a) Calcúlese la probabilidad de que un individuo tomado al azar mida menos de 55 cm.
- b) Calcúlese la probabilidad de que un individuo tomado al azar mida entre 45 y 55 cm.
- c) Si se toma una muestra aleatoria simple de 100 individuos, calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 51 cm.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (3 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + my + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}.$$

a) Estúdiase la compatibilidad del sistema en función de los valores de m .

b) Resuélvase el sistema para $m = 0$.

c) Resuélvase el sistema para $m = 1$.

a) La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2m + 1 - 4 - m + 2 = 3 - 3m$.

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 3 - 3m = 0 \Rightarrow 3 = 3m \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 4 \quad -2 \quad 6 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B . Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

b) Lo resolvemos para $m = 0$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - (1 - 2x) = 3 \\ 2x + y + 1 - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{z = 1 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{-5}{3}}$$

La solución del sistema para $m = 0$ es $x = \frac{4}{3}$, $y = 0$, $z = \frac{-5}{3}$.

c) Lo resolvemos para $m = 1$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{2 \quad 1 \quad 1}^{A/B} & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3y - 3z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3y = 5 + 3z \rightarrow y = \frac{5 + 3z}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{5 + 3z}{3} + z = 1 \Rightarrow 6x + 5 + 3z + 3z = 3 \Rightarrow 6x = -2 - 6z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = -1 - 3z \Rightarrow x = \frac{-1 - 3z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - 3z}{3} \\ y = \frac{5 + 3z}{3} \\ z = z \end{cases} ; z \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema para $m = 1$ son $\begin{cases} x = \frac{-1}{3} - z \\ y = \frac{5}{3} + z \\ z = z \end{cases} ; z \in \mathbb{R}.$

Ejercicio 2. (2,5 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 3x$.

- a) Determinéense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y sus mínimos relativos.
 b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x \rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

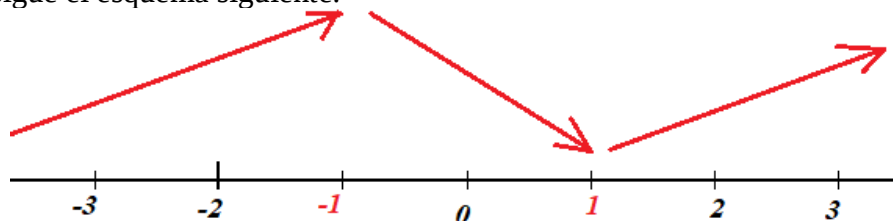
$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

La función tiene dos puntos críticos: $x = -1$ y $x = 1$, estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$, la función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$, la función decrece en $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$, la función crece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ y $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 2)$ y el mínimo relativo $(1, -2)$.

- b) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2 \\ f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 \\ y - f(2) = f'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = 9(x - 2) \Rightarrow y - 2 = 9x - 18 \Rightarrow \boxed{y = 9x - 16}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 9x - 16$.

Ejercicio 3. (2 puntos) De una plantilla formada por 4 hombres y 6 mujeres se elige al azar una pareja para participar en determinado proyecto.

- a) Calcúlese la probabilidad de que las dos personas elegidas sean mujeres.
- b) Calcúlese la probabilidad de que al menos una persona elegida sea hombre.
- c) Calcúlese la probabilidad de que las dos personas elegidas sean del mismo sexo.
- d) Calcúlese la probabilidad de que las dos personas elegidas sean del mismo sexo sabiendo que una de ellas es una mujer.

Utilizamos combinatoria. De un grupo de 10 personas se pueden elegir $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ parejas distintas.

- a) Del grupo de 6 mujeres se pueden elegir $C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ parejas distintas siendo las dos

mujeres. La probabilidad de que las dos personas elegidas sean mujeres vale $\frac{15}{45} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$.

- b) Hay 15 parejas que son dos mujeres, por lo que hay $45 - 15 = 30$ parejas que contienen al menos 1

hombre. La probabilidad de que al menos una persona elegida sea hombre vale $\frac{30}{45} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$.

- c) Hay 15 parejas que son dos mujeres y $C_4^2 = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ parejas que son dos hombres, por lo que

hay $15 + 6 = 21$ parejas que son del mismo sexo. La probabilidad de que las dos personas elegidas sean del mismo sexo vale $\frac{21}{45} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$.

- d) Se pueden elegir 6 parejas siendo los dos hombres. Las restantes $45 - 6 = 39$ parejas contienen al menos una mujer. Como son 15 las parejas que son dos mujeres. La probabilidad de que las dos personas elegidas sean del mismo sexo sabiendo que una de ellas es una mujer vale $\frac{15}{39} = \frac{5}{13} \approx 0.3846$.

Ejercicio 4. (2,5 puntos)

Una muestra aleatoria simple de 16 jóvenes de entre 18 y 25 años proporciona los siguientes tiempos de uso diario del teléfono móvil (en horas):

4 5 4,5 5 6 3 5,5 4 6 3,5 4,5 2 4 5 3 5

a) Calcúlese la media y la mediana de la muestra.

b) El tiempo de uso diario del móvil por jóvenes de 18 a 25 años se puede aproximar por una distribución normal de media μ horas y desviación típica 4 horas. Para la muestra de tamaño 16 anterior, determínese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de uso diario de móvil.

Hacemos una tabla de frecuencias con los datos del problema.

Nº horas	2	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	
Nº jóvenes	1	2	1	3	2	4	1	2	16

a) Obtenemos la media.

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3.5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4.5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 5.5 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{16} = 4.375 \text{ horas}$$

Añadimos a la tabla la frecuencia acumulada.

Nº horas	2	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	
Nº jóvenes	1	2	1	3	2	4	1	2	16
Frecuencia acumulada	1	3	4	7	9	13	14	16	

Como $\frac{16}{2} = 8$ la mediana es la media entre el dato situado en la posición octava y novena.

Como los dos datos son 4.5 horas la mediana es 4.5 horas. Este valor deja por debajo a 7 jóvenes y por encima a otros 7 jóvenes.

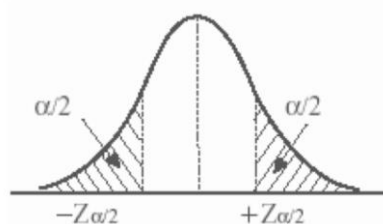
b) X = El tiempo de uso diario del móvil (horas) por jóvenes de 18 a 25 años. $X = N(\mu, 4)$.

El tamaño de la muestra es $n = 16$ jóvenes. La media muestral es $\bar{x} = 4.375$ horas.

Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} = 1.96 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4.375 - 1.96, 4.375 + 1.96) = (2.415, 6.335)$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (2,5 puntos)

Represéntese gráficamente la región S del plano definida por las inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 5 \\ 2x \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Calcúlese el máximo de la función $f(x, y) = 3x + 2y$ sobre los puntos de S.

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$2x + y = 4$$

x	y = 4 - 2x
1	2
1.5	1

$$x + 2y = 5$$

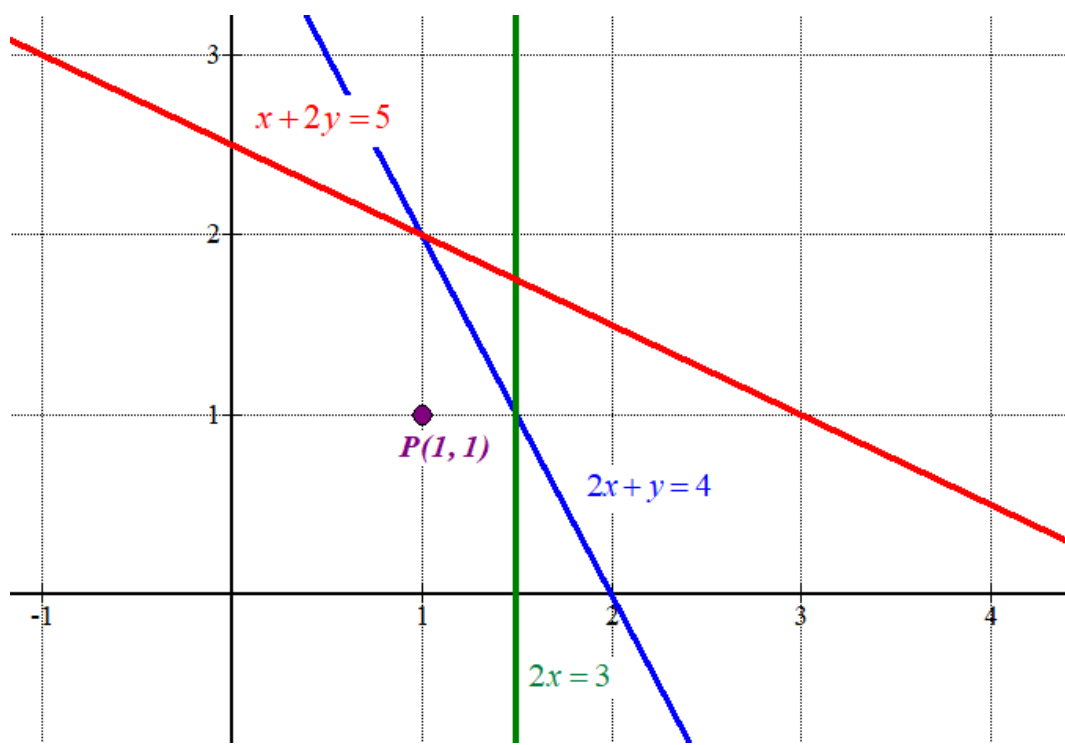
x	y = $\frac{5-x}{2}$
0	2.5
1	2

$$2x = 3$$

x = $\frac{3}{2}$	y
1.5	0
1.5	1

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

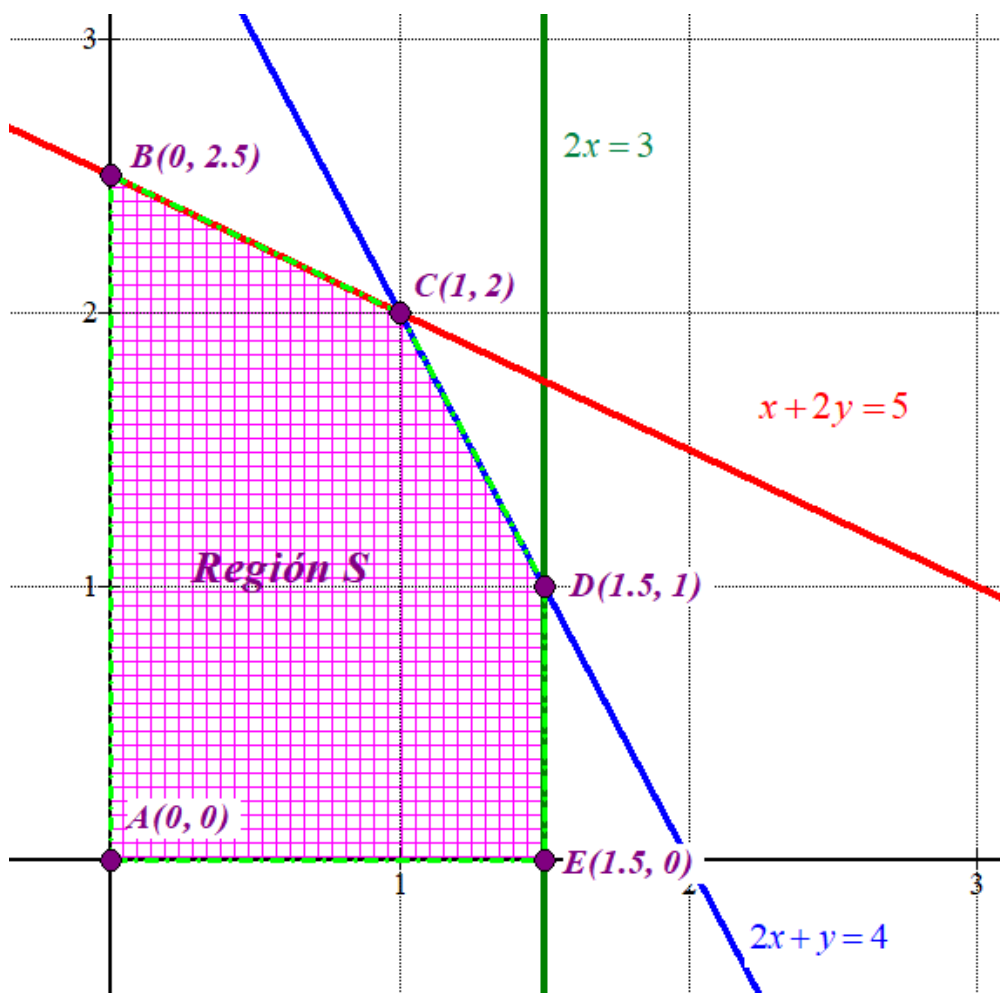


Como las restricciones son $\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 5 \\ 2x \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ la región S es la región del primer cuadrante situada a la izquierda de la recta vertical verde y por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 2+1 \leq 4 \\ 1+2 \leq 5 \\ 2 \leq 3 \\ 1,1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos la región S en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función $f(x, y) = 3x + 2y$ en cada vértice en busca de su valor máximo.

- $A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$
- $B(0, 2.5) \rightarrow f(0, 2.5) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2.5 = 5$
- $C(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$ ¡Máximo!
- $D(1.5, 1) \rightarrow f(1.5, 1) = 3 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1 = 6.5$
- $E(1.5, 0) \rightarrow f(1.5, 0) = 3 \cdot 1.5 + 2 \cdot 0 = 4.5$

El valor máximo de la función es 7 que se alcanza en el punto $C(1, 2)$.

Ejercicio 2. (3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x^4 + 2x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 + 2}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Estúdiese la continuidad de f en su dominio.
 b) Determinénse las asíntotas oblicuas de f , si existen.
 c) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

- a) En el intervalo $(-\infty, 2)$ la función tiene la expresión $f(x) = x^4 + 2x^2$. Esta es una función polinómica que es continua.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$. Esta es una función racional cuyo denominador se anula para $x = 2$ que no pertenece a su intervalo de definición, por lo que es continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^4 + 2 \cdot 2^2 = 24 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^4 + 2x^2 = 24 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \frac{2^2 + 2}{2 - 2} = \frac{6}{0} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 24 \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 2$. Presenta una discontinuidad de salto infinito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

- b) La asíntota oblicua tiene la expresión $y = mx + n$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

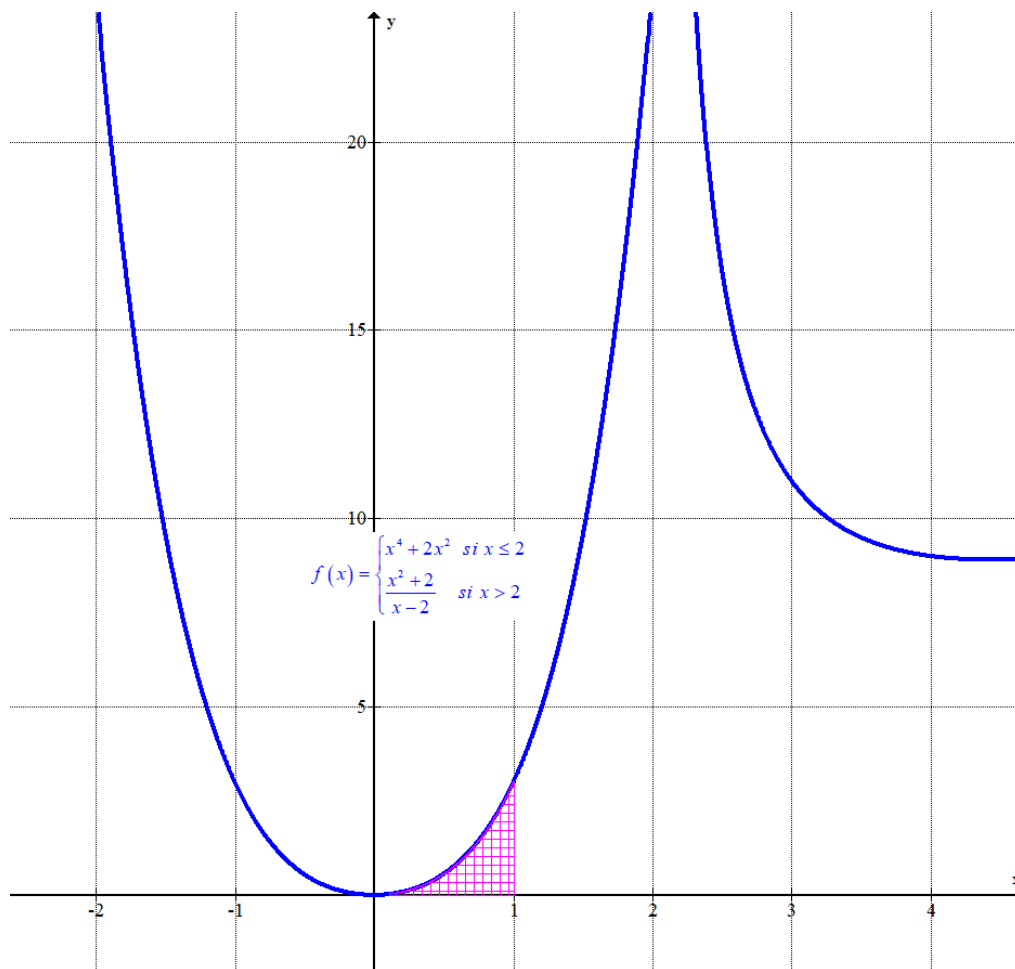
Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2x = +\infty$$

Cuando x tiende a $-\infty$ la función no tiene asíntota oblicua.

- c) En el intervalo $[0, 1]$ la función tiene la expresión $f(x) = x^4 + 2x^2$.

Dibujamos la región de la que queremos hallar el área.



El área de la región es el valor de la integral definida de 0 a 1 de $f(x) = x^4 + 2x^2$.

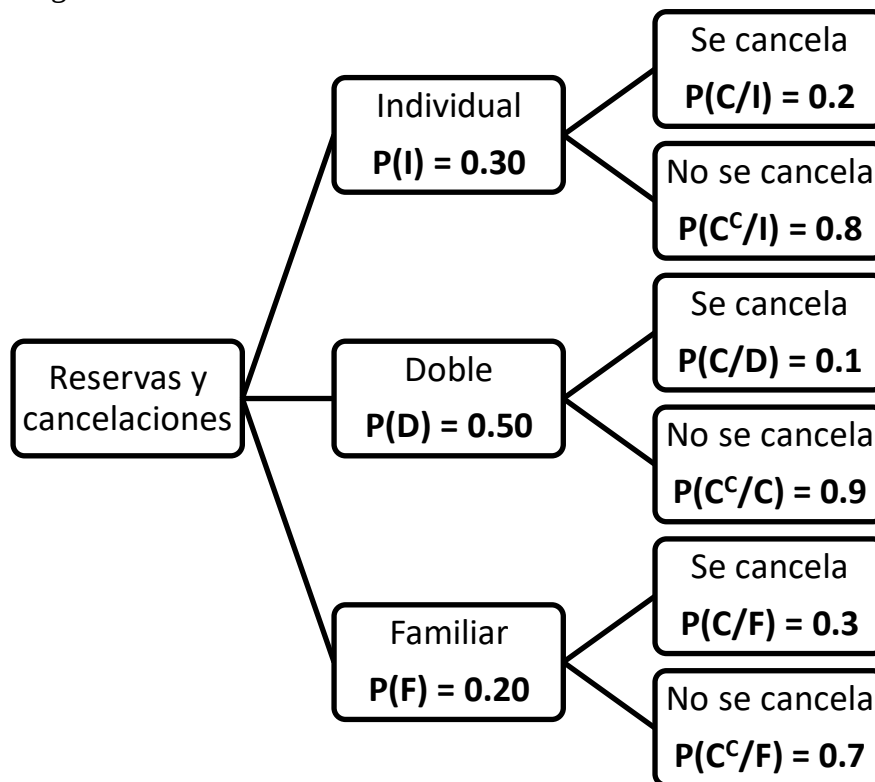
$$\text{Área} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^4 + 2x^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{1^5}{5} + \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^5}{5} + \frac{2 \cdot 0^3}{3} \right] = \boxed{\frac{13}{15} \approx 0.867 u^2}$$

Ejercicio 3. (2 puntos)

Un hotel admite reservas para tres tipos de habitaciones. El 30% de las reservas son para habitaciones individuales, el 50% para habitaciones dobles y el 20% para habitaciones familiares. La probabilidad de que una reserva se cancele es de 0'2 para las habitaciones individuales, de 0'1 para las dobles y de 0'3 para las familiares.

- a) Calcúlese la probabilidad de que una reserva elegida al azar sea cancelada.
 b) Sabiendo que la reserva ha sido cancelada, determínese la probabilidad de que fuera para una habitación individual.

Llamamos I a “hacer una reserva de una habitación individual”, D a “hacer una reserva de una habitación doble”, F a “hacer una reserva de una habitación familiar” y C a “cancelar la reserva”. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P(I)P(C/I) + P(D)P(C/D) + P(F)P(C/F) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.17}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(I/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/C) = \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = \frac{P(I)P(C/I)}{P(C)} = \frac{0.3 \cdot 0.2}{0.17} = \frac{6}{17} \approx 0.353$$

Ejercicio 4. (2,5 puntos)

La altura de los individuos de cierta especie (en cm) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 50 cm y desviación típica 5 cm.

- Calcúlese la probabilidad de que un individuo tomado al azar mida menos de 55 cm.
- Calcúlese la probabilidad de que un individuo tomado al azar mida entre 45 y 55 cm.
- Si se toma una muestra aleatoria simple de 100 individuos, calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 51 cm.

Consideramos X = La altura de los individuos de cierta especie (en cm). $X = N(50, 5)$

- Nos piden calcular $P(X < 55)$.

$$P(X < 55) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{55-50}{5}\right) = P(Z < 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8413}$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,504
0,1	0,5398	0,543
0,2	0,5793	0,583
0,3	0,6179	0,621
0,4	0,6554	0,659
0,5	0,6915	0,695
0,6	0,7257	0,729
0,7	0,7580	0,761
0,8	0,7881	0,791
0,9	0,8159	0,818
1,0	0,8413	0,843
1,1	0,8643	0,866

- Nos piden calcular $P(45 < X < 55)$.

$$\begin{aligned} P(45 < X < 55) &= P(X < 55) - P(X < 45) = 0.8413 - P(X < 45) = \\ &= \{\text{Tipificamos}\} = 0.8413 - P\left(Z < \frac{45-50}{5}\right) = 0.8413 - P(Z < -1) = \\ &= 0.8413 - P(Z > 1) = 0.8413 - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \\ &= 0.8413 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.6826} \end{aligned}$$

- Si $X = N(50, 5)$ la distribución de la media muestral de las muestras de tamaño 100 es

$$\overline{X}_{100} = N\left(50, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{100} = N(50, 0.5).$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{100} < 51)$.

$$P(\overline{X}_{100} < 51) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{51-50}{0.5}\right) = P(Z < 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9772}$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,504
0,1	0,5398	0,543
0,2	0,5793	0,583
0,3	0,5179	0,621
0,4	0,5554	0,659
0,5	0,6915	0,695
0,6	0,7257	0,729
0,7	0,7580	0,761
0,8	0,7881	0,791
0,9	0,8159	0,818
1,0	0,8413	0,843
1,1	0,8643	0,866
1,2	0,8849	0,886
1,3	0,9032	0,904
1,4	0,9192	0,920
1,5	0,9332	0,934
1,6	0,9452	0,946
1,7	0,9554	0,956
1,8	0,9641	0,964
1,9	0,9713	0,971
2,0	0,9772	0,977
2,1	0,9821	0,982