

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones que se le ofrecen (A o B) y sólo a una. Debe dar respuestas concisas y justificar los argumentos empleados.

Valoración: La puntuación de cada ejercicio, así como la de cada apartado, se indica en el encabezamiento de los mismos.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (3 puntos). Sea

$$f(x, y) = 4x + 3y$$

la función objetivo que se quiere optimizar (maximizar y minimizar) bajo las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0, \\ x + 2y \geq 4, & 2x + y \leq 10, \\ x + y \leq 6. \end{cases}$$

- (a) (1 pto) Representa la región factible en el plano.
- (b) (1 pto) Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (c) (1 pto) Determina el valor máximo y mínimo de $f(x, y)$ en la región, indicando los puntos donde se alcanzan.

Ejercicio 2 (3 puntos). Se define la siguiente función dependiendo de un parámetro real a :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{x-2}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Contesta a las siguientes preguntas:

- (a) (1 pto) Determina el dominio de la función.
- (b) (1 pto) Halla el valor de a que hace continua la función en $x = 1$.
- (c) (1 pto) Discute la existencia de asíntotas verticales y horizontales, si las hubiera, para los distintos valores de x (o de a , si fuera relevante).

Ejercicio 3 (2 puntos). Se ha tomado una muestra de tamaño $n = 8$ de una variable aleatoria normal con media μ desconocida y desviación típica poblacional conocida $\sigma = 12$. Los valores observados han sido:

160, 175, 182, 170, 165, 190, 200, 178.

- (a) (0.5 ptos) Inventa un enunciado, coherente con estos datos, que justifique la necesidad de calcular un intervalo de confianza para μ .
- (b) (1.5 ptos) Determina el intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional μ a partir de los datos de la muestra. Explica brevemente cómo interpretar dicho intervalo.

Ejercicio 4 (2 puntos). Se lanza un dado donde la probabilidad de obtener un número par es el doble de la de obtener un número impar.

- (a) (1 pto.) Determina la probabilidad de cada resultado.
- (b) (1 pto.) Si se lanza dos veces, calcula la probabilidad de obtener al menos un número impar.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (3 puntos). Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resuelve las siguientes cuestiones:

- (a) (1 pto) Determinante de la matriz A .
- (b) (1 pto) Determina si la matriz A es invertible. En caso afirmativo calcula su inversa.
- (c) (1 pto) Verifica que: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Ejercicio 2 (2 puntos). Sea $f''(x) = e^x + 2$. A partir de esta segunda derivada:

- (a) (0.5 pto) Determina la primera derivada $f'(x)$.
- (b) (1.5 pto) Encuentra la función $f(x)$ de tal manera que tanto $f(x)$ como $f'(x)$ pasan por el origen.

Ejercicio 3 (2 puntos). Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- (a) (1 pto) La varianza de una muestra siempre es menor que la varianza poblacional.
- (b) (1 pto) Si dos eventos son independientes, entonces la intersección siempre es el vacío.

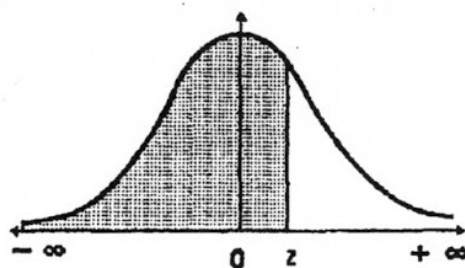
Ejercicio 4 (3 puntos). En una determinada ciudad, existe una enfermedad poco frecuente que afecta al 0.5 % de la población. Para diagnosticarla se ha desarrollado un test que presenta las siguientes características:

- **Sensibilidad:** 98 % (es decir, si una persona tiene la enfermedad, el test da un resultado positivo en el 98 % de los casos).
- **Especificidad:** 95 % (es decir, si una persona no tiene la enfermedad, el test da un resultado negativo en el 95 % de los casos).

Calcula:

- (a) (1 pto) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no tenga la enfermedad pero el test sea positivo?
- (b) (1 pto) Si una persona da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad?
- (c) (1 pto) Si una persona da negativo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no tenga la enfermedad?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0;1)$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0;1)$, esté por debajo del valor z .

Soluciones a la Opción A

[Ejercicio 1 — (3 puntos)] Sea

$$f(x, y) = 4x + 3y,$$

con restricciones

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0, \\ x + 2y \geq 4, & 2x + y \leq 10, \\ x + y \leq 6. \end{cases}$$

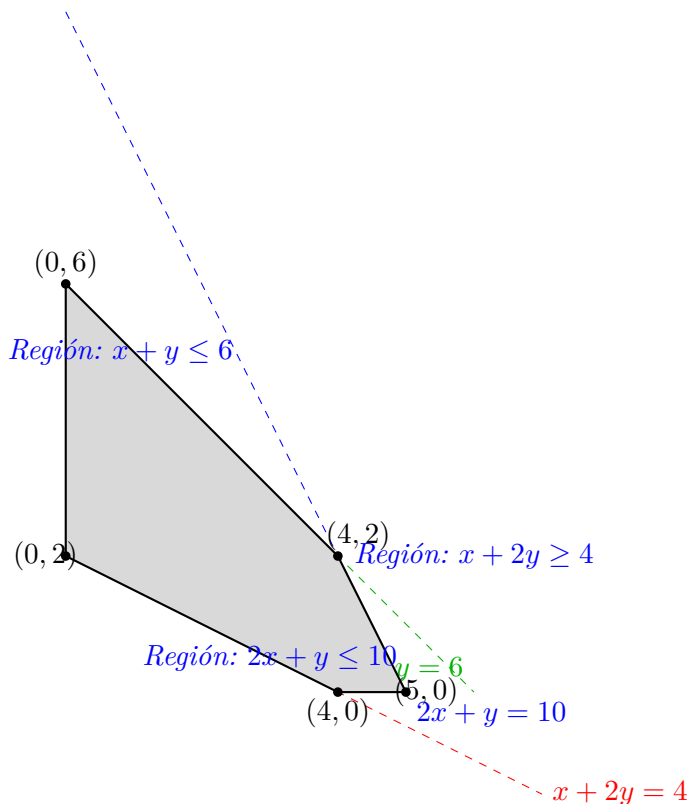
Se pide:

- (a) Representar la región factible en el plano.
- (b) Calcular las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (c) Determinar el valor máximo y mínimo de $f(x, y)$ en la región, indicando los puntos donde se alcanzan.

Solución 1 (a) Representación de la región:

Las restricciones definen las siguientes regiones:

- $x \geq 0$ y $y \geq 0$: el primer cuadrante.
- $x + 2y \geq 4$: la región situada sobre (o sobre la que incluye) la recta $x + 2y = 4$. Esta recta pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 2)$.
- $2x + y \leq 10$: la región situada por debajo de la recta $2x + y = 10$, que pasa por $(5, 0)$ y $(0, 10)$.
- $x + y \leq 6$: la región por debajo de la recta $x + y = 6$, que pasa por $(6, 0)$ y $(0, 6)$.



El área factible es la intersección de todas estas regiones en el primer cuadrante.

Evaluación: Dependiendo de las restricciones correctas valorar múltiplos de 0.25.

(b) Cálculo de los vértices:

Debemos determinar las intersecciones relevantes. Se indican algunas intersecciones:

1. Intersección de $x + 2y = 4$ con el eje y ($x = 0$):

$$0 + 2y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Vértice $V_1 = (0, 2)$.

2. Intersección de $x + 2y = 4$ con el eje x ($y = 0$):

$$x + 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Vértice $V_2 = (4, 0)$.

3. Intersección de $2x + y = 10$ con el eje x ($y = 0$):

$$2x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

Vértice $V_3 = (5, 0)$.

4. Intersección de $x + y = 6$ con el eje y ($x = 0$):

$$0 + y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6.$$

Vértice $V_4 = (0, 6)$.

5. Intersección de $2x + y = 10$ y $x + y = 6$:

Restando la segunda de la primera:

$$(2x + y) - (x + y) = 10 - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Sustituyendo en $x + y = 6$:

$$4 + y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Vértice $V_5 = (4, 2)$.

Ahora, analizando la región factible (recordar que además se tienen las restricciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$) se concluye que los vértices extremos del polígono factible son:

$$V_4 = (0, 6), \quad V_5 = (4, 2), \quad V_3 = (5, 0), \quad V_2 = (4, 0), \quad V_1 = (0, 2).$$

Evaluación: en función de los vértices correctos puntuar múltiplos de 0.25.

(c) Optimización de $f(x, y)$:

Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$$f(0, 6) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 6 = 18.$$

$$f(4, 2) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 16 + 6 = 22.$$

$$f(5, 0) = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 20.$$

$$f(4, 0) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 16.$$

$$f(0, 2) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6.$$

Se observa que:

■ **Máximo:** $f_{\text{máx}} = 22$ en el punto $(4, 2)$.

■ **Mínimo:** $f_{\text{mín}} = 6$ en el punto $(0, 2)$.

Evaluación: Máximo (0.5 pto), Mínimo (0.5 pto).

[Ejercicio 2 — (3 puntos)] Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a x, & x < 1, \\ \frac{1}{x-2}, & x \geq 1, \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Contesta:

- (a) Determinar el dominio de la función.
- (b) Hallar el valor de a que hace continua la función en $x = 1$.
- (c) Discutir la existencia de asíntotas verticales y horizontales.

Solución 2 (a) Dominio:

Para $x < 1$, la función es un polinomio, cuyo dominio es $(-\infty, 1)$.

Para $x \geq 1$, la función es $f(x) = 1/(x-2)$, que está definida para todo $x \geq 1$ salvo en $x = 2$, donde se anula el denominador.

Por lo tanto, el dominio de f es:

$$(-\infty, 1) \cup [1, 2) \cup (2, +\infty).$$

(b) Continuidad en $x = 1$:

Para que f sea continua en $x = 1$, se requiere que el límite por la izquierda sea igual al valor de la función en 1 (que se obtiene con la definición para $x \geq 1$).

Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - a \cdot 1 = 1 - a.$$

Y, por definición,

$$f(1) = \frac{1}{1-2} = -1.$$

Igualando para continuidad:

$$1 - a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Por tanto, la función es continua en $x = 1$ si y sólo si

$$a = 2.$$

(c) Asíntotas:

- Para $x < 1$, $f(x) = x^2 - a x$ es un polinomio, por lo que no presenta asíntotas.
- Para $x \geq 1$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$:
 - Asíntota vertical: El denominador se anula en $x = 2$, por lo que existe una asíntota vertical en $x = 2$.
 - Asíntota horizontal: Se estudia el límite cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0.$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Evaluación: En apartado (a) y (b) valorar el planteamiento en caso de que no esté correcto el cálculo. En el apartado (c) 0.5 pto por cada asíntota.

[Ejercicio 3 — (2 puntos)] Se ha tomado una muestra de tamaño $n = 8$ de una variable aleatoria normal con media desconocida μ y desviación típica poblacional conocida $\sigma = 12$. Los valores observados son:

160, 175, 182, 170, 165, 190, 200, 178.

Responde:

- (a) Inventar un enunciado, coherente con este contexto, que justifique la necesidad de calcular un intervalo de confianza para μ .
- (b) Determinar el intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional μ . Explica brevemente su interpretación.

Solución 3 Preámbulo: En este ejercicio se utiliza que, al conocer σ , el intervalo de confianza para μ con nivel de confianza del 95 % es:

$$\bar{x} \pm z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde $z_{0,975} = 1,96$.

Cálculo de la media muestral:

Se suman los datos:

$$160 + 175 + 182 + 170 + 165 + 190 + 200 + 178 = 1420.$$

La media es:

$$\bar{x} = \frac{1420}{8} = 177,5.$$

Cálculo del error estándar:

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{8}} = \frac{12}{2,828} \approx 4,243.$$

Cálculo del intervalo:

El margen de error es:

$$E = 1,96 \times 4,243 \approx 8,316.$$

Por tanto, el intervalo de confianza es:

$$(177,5 - 8,316, 177,5 + 8,316) \approx (169,18, 185,82).$$

$(169,18, 185,82).$

Interpretación:

Este intervalo se interpreta de la siguiente forma: Si se repitiera el experimento muchas veces, aproximadamente el 95 % de los intervalos calculados de esta manera contendrían el valor verdadero de μ .

Evaluación: Inventar un enunciado coherente (0.5 pto), poner la fórmula del intervalo (0.5 pto), calcularlo (0.5 pto) y poner la interpretación (0.5 pto).

[Ejercicio 4 — (2 puntos)] Se lanza un dado en el que la probabilidad de obtener un número par es el doble de la de obtener un número impar.

- (a) Determinar la probabilidad de cada resultado.
- (b) Si se lanza dos veces, calcular la probabilidad de obtener al menos un número impar.

Solución 4 Sea q la probabilidad de obtener un número impar en un lanzamiento individual. Como el dado tiene 3 caras impares y 3 caras pares, y se indica que cada número par tiene el doble de probabilidad que cada número impar, se tiene:

$$\begin{cases} P(\text{cada impar}) = q, \\ P(\text{cada par}) = 2q. \end{cases}$$

La suma de las probabilidades de las 6 caras debe ser 1:

$$3q + 3(2q) = 3q + 6q = 9q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{9}.$$

Por tanto:

$$P(\text{cada impar}) = \frac{1}{9} \quad y \quad P(\text{cada par}) = \frac{2}{9}.$$

(b) Cálculo de la probabilidad de obtener al menos un impar en dos lanzamientos:

Es más sencillo calcular la probabilidad del evento complementario, es decir, que ambos lanzamientos sean pares, y luego restar de 1.

La probabilidad de obtener un resultado par en un lanzamiento es:

$$P(\text{par}) = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Así, la probabilidad de que en dos lanzamientos ambos sean pares es:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener al menos un impar es:

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$\boxed{\frac{5}{9}}.$$

Evaluación: Considerar el planteamiento en cada uno de los apartados.

Soluciones del Examen – Opción B

[Ejercicio 1 — (3 puntos)] Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resuelve:

- (a) Calcular $\det(A)$.
- (b) Determinar si A es invertible y, en caso afirmativo, hallar A^{-1} .
- (c) Verificar que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ utilizando propiedades de los determinantes.

Solución 5 (a) Cálculo de $\det(A)$:

Utilizando la regla de cofactores sobre la primera fila:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se calculan los determinantes 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)(2) - (0)(4) = -2.$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 - (5)(4) = -20.$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - (5)(-1) = 5.$$

Sustituyendo:

$$\det(A) = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-20) + 3 \cdot (5) = -2 + 40 + 15 = 53.$$

$\det(A) = 53.$

(b) Invertibilidad e inversión de A :

Como $\det(A) \neq 0$, la matriz A es invertible. La fórmula para la inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A),$$

donde $\operatorname{adj}(A)$ es la matriz adjunta (la traspuesta de la matriz de cofactores).

Calculamos los cofactores C_{ij} :

$$\blacksquare C_{11} = \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2.$$

$$\blacksquare C_{12} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -(-20) = 20.$$

$$\blacksquare C_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 5.$$

$$\blacksquare C_{21} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -(2 \cdot 2 - 0 \cdot 3) = -4.$$

$$\blacksquare C_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13.$$

$$\blacksquare C_{23} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 0 - 5 \cdot 2) = -(-10) = 10.$$

$$\blacksquare C_{31} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11.$$

$$\blacksquare C_{32} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 - 0 \cdot 3) = -4.$$

$$\blacksquare C_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 = -1.$$

La matriz de cofactores es:

$$\begin{pmatrix} -2 & 20 & 5 \\ -4 & -13 & 10 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

La adjunta de A es la traspuesta:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 11 \\ 20 & -13 & -4 \\ 5 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{53} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 11 \\ 20 & -13 & -4 \\ 5 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{53} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 11 \\ 20 & -13 & -4 \\ 5 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Verificación de la propiedad de los determinantes:

Se debe demostrar que

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Paso 1: Calcular $\det(B)$.

La matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la expansión por la primera fila:

$$\det(B) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4.$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = -6 - 4 = -10.$$

Por lo tanto,

$$\det(B) = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-10) = -8 - 10 = -18.$$

$$\boxed{\det(B) = -18.}$$

Paso 2: Calcular $\det(AB)$.
Calculamos el producto AB :

$$AB = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizamos la multiplicación:

$$\begin{aligned} (AB)_{11} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 2 - 6 + 3 = -1, \\ (AB)_{12} &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 0 + 8 + 6 = 14, \\ (AB)_{13} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 1 + 4 + 0 = 5; \\ (AB)_{21} &= 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = 0 + 3 + 4 = 7, \\ (AB)_{22} &= 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 0 - 4 + 8 = 4, \\ (AB)_{23} &= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0 - 2 + 0 = -2; \\ (AB)_{31} &= 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 10 + 0 + 2 = 12, \\ (AB)_{32} &= 5 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0 + 0 + 4 = 4, \\ (AB)_{33} &= 5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 5 + 0 + 0 = 5. \end{aligned}$$

Así,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 14 & 5 \\ 7 & 4 & -2 \\ 12 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ahora, se calcula $\det(AB)$ (por ejemplo, por la primera fila):

$$\det(AB) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 14 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los 2×2 :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} &= 4 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 20 + 8 = 28. \\ \det \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} &= 7 \cdot 5 - (-2) \cdot 12 = 35 + 24 = 59. \\ \det \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} &= 7 \cdot 4 - 4 \cdot 12 = 28 - 48 = -20. \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\det(AB) = -1 \cdot 28 - 14 \cdot 59 + 5 \cdot (-20) = -28 - 826 - 100 = -954.$$

Verificación:

Se tiene:

$$\det(A) \cdot \det(B) = 53 \cdot (-18) = -954,$$

que coincide con $\det(AB)$.

Por lo tanto, se verifica que

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}.$$

Evaluación: en este ejercicio hay que tener sensibilidad con los desarrollos y si están bien darle al menos la mitad de cada apartado.

[Ejercicio 2 — (2 puntos)]

Se da que

$$f''(x) = e^x + 2.$$

A partir de esta información:

(a) Determinar la primera derivada $f'(x)$.

(b) Encontrar la función $f(x)$ de modo que tanto $f(x)$ como $f'(x)$ pasan por el origen.

Solución 6 (a) Cálculo de $f'(x)$:

Integrando $f''(x)$:

$$f'(x) = \int (e^x + 2)dx = e^x + 2x + C,$$

donde C es la constante de integración.

(b) Cálculo de $f(x)$ y determinación de las constantes:

Integrando $f'(x)$:

$$f(x) = \int (e^x + 2x + C)dx = e^x + x^2 + Cx + D,$$

donde D es otra constante de integración.

Se imponen las condiciones:

$$f(0) = 0 \quad y \quad f'(0) = 0.$$

Primero, de $f'(0)$:

$$f'(0) = e^0 + 2 \cdot 0 + C = 1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1.$$

Luego, de $f(0)$:

$$f(0) = e^0 + 0^2 + (-1) \cdot 0 + D = 1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -1.$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$f'(x) = e^x + 2x - 1,$$

$$f(x) = e^x + x^2 - x - 1.$$

$f(x) = e^x + x^2 - x - 1 \quad y \quad f'(x) = e^x + 2x - 1.$
--

Evaluación: En el apartado (b) si se obtiene $f(x)$ se da 0.5 puntos y por cada constante de integración otro 0.5 punto.

[Ejercicio 3 — (2 puntos)] Se pide justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) La varianza de una muestra siempre es menor que la varianza poblacional.

(b) Si dos eventos son independientes, entonces su intersección siempre es el vacío.

Solución 7 (a) Falsa.

La varianza muestral es una estimación de la varianza poblacional. Puede ser mayor o menor que la varianza poblacional en una muestra particular; no existe una relación de orden general que garantice que la varianza de la muestra sea siempre menor que la poblacional.

(b) Falsa.

Dos eventos independientes satisfacen que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

La independencia no implica que los eventos no puedan ocurrir simultáneamente (es decir, que su intersección sea vacía). De hecho, si ambos tienen probabilidad positiva, su intersección también tendrá probabilidad positiva.

Evaluación: 0.25 por acertar si es verdadera o falsa y 0.25 por el razonamiento.

[Ejercicio 4 — (3 puntos)] Se tiene que en una ciudad existe una enfermedad que afecta al 0.5 % de la población. Se dispone de un test con:

- **Sensibilidad:** 98 % (si una persona tiene la enfermedad, el test es positivo en el 98 % de los casos).
- **Especificidad:** 95 % (si una persona no tiene la enfermedad, el test es negativo en el 95 % de los casos).

Se pide calcular:

- (a) La probabilidad de que una persona no tenga la enfermedad pero el test sea positivo.
- (b) Si una persona da positivo, la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad.
- (c) Si una persona da negativo, la probabilidad de que realmente no tenga la enfermedad.

Solución 8 Definimos los siguientes eventos:

E : la persona tiene la enfermedad, $\bar{E}$: la persona no la tiene,

T^+ : test positivo, T^- : test negativo.

Los datos son:

$$\begin{aligned} P(E) &= 0,005, & P(\bar{E}) &= 0,995, \\ P(T^+|E) &= 0,98 & \Rightarrow & P(T^-|E) = 0,02, \\ P(T^-|\bar{E}) &= 0,95 & \Rightarrow & P(T^+|\bar{E}) = 0,05. \end{aligned}$$

(a) Probabilidad de falso positivo:

Se desea calcular

$$P(\bar{E} \cap T^+) = P(T^+|\bar{E}) \cdot P(\bar{E}) = 0,05 \times 0,995 \approx 0,04975.$$

$$\boxed{P(\bar{E} \cap T^+) \approx 4,975 \%}$$

(b) Valor predictivo positivo:

Utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(E|T^+) = \frac{P(T^+|E)P(E)}{P(T^+)},$$

donde

$$P(T^+) = P(T^+|E)P(E) + P(T^+|\bar{E})P(\bar{E}) = 0,98 \times 0,005 + 0,05 \times 0,995.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} 0,98 \times 0,005 &= 0,0049, & 0,05 \times 0,995 &= 0,04975, \\ P(T^+) &= 0,0049 + 0,04975 = 0,05465. \end{aligned}$$

Entonces,

$$P(E|T^+) = \frac{0,0049}{0,05465} \approx 0,0896,$$

es decir, aproximadamente el 8.96 %.

$$\boxed{P(E|T^+) \approx 8,96 \%}$$

(c) Valor predictivo negativo:

Queremos calcular

$$P(\bar{E}|T^-) = \frac{P(T^-|\bar{E})P(\bar{E})}{P(T^-)},$$

donde

$$P(T^-) = P(T^-|E)P(E) + P(T^-|\bar{E})P(\bar{E}) = 0,02 \times 0,005 + 0,95 \times 0,995.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} 0,02 \times 0,005 &= 0,0001, & 0,95 \times 0,995 &= 0,94525, \\ P(T^-) &= 0,0001 + 0,94525 = 0,94535. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(\bar{E}|T^-) = \frac{0,94525}{0,94535} \approx 0,99989,$$

es decir, prácticamente el 99.989 %.

$$\boxed{P(\bar{E}|T^-) \approx 99,99 \%}$$

Evaluación: En cada apartado tener en cuenta el planteamiento.