



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las cuatro inecuaciones lineales:

$$(i) 4y - x \geq 4, (ii) 2y - x \leq 6, (iii) y - x \leq 1, (iv) 2y + x \leq 8$$

- Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones (i), (ii), (iii) y (iv). ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).
- ¿Cuál es el máximo de la función $F(x, y) = 3x - 2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

A 2 (hasta 3 puntos)

En el periódico local se publican al mes x anuncios de un gimnasio, para captar abonados, siendo $0 \leq x \leq 14$. El precio por anuncio es de 300 €. El número de abonados se estima mediante la función $A(x) = -x^2 + 28x$, y cada uno paga mensualmente 100 €. Además del gasto en anuncios, el gimnasio gasta mensualmente 12.000 € en mantenimiento. El balance mensual, $f(x)$, son las cuotas de socios menos los gastos.

- ¿Cuál es el menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas y conseguir que el negocio sea rentable?
- ¿Cuántos anuncios deben contratarse para maximizar las ganancias y a cuántos euros ascienden dichas ganancias?

A 3 (hasta 2 puntos)

En una clínica se realizan únicamente tres tipos de servicios: ecografías, en el 35% de los casos, radiografías, en el 40% y resonancias magnéticas en el 25%. El 60% de las ecografías son de mujeres, el 50% de las radiografías son de mujeres y el 60% de las resonancias son de hombres. Si se elige un paciente al azar se pide:

- La probabilidad de que el paciente elegido haya sido mujer.
- Si el paciente elegido ha sido mujer, probabilidad de que el servicio realizado sea una ecografía.

A 4 (hasta 2 puntos)

El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 usuarios, resulta que la media de viajes realizados por los viajeros es de 16 viajes. Contestar:

- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de significación del 4%?
- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de confianza del 98%?



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2017ko UZTAILA

JULIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$, encontrar las

componentes de las matrices de dimensión 2×2 , $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

- a) $AMB = C$
- b) $AHB^{-1} = C$.

B 2 (hasta 3 puntos)

Sean el polinomio cúbico $p(x) = 2x^3 + bx^2 + c$ y la parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$.

- a) Determinar los coeficientes de las incógnitas b y c para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x = 0$ y $x = 6$. Dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.
- b) Calcular el área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$, sabiendo que en su interior no hay ningún punto de corte de $p(x)$ y $q(x)$.

B 3 (hasta 2 puntos)

Una familia hace sus compras de la siguiente manera: el 50% en tiendas locales, el 40% por Internet y, el resto, a través de terceras personas. En las tiendas pagan en el 60% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico. En Internet pagan en el 70% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico (contra reembolso). Si compran a través de una tercera persona, siempre pagan en metálico. Si se elige una compra al azar:

- a) Calcular la probabilidad de que ésta se haya pagado en metálico.
- b) Si una compra se ha pagado con tarjeta, calcular la probabilidad de que ésta se haya hecho en una tienda.

B 4 (hasta 2 puntos)

Se desea estimar la proporción de personas que son miopes, para lo cual, se toma una muestra de n individuos.

- a) El porcentaje de miopes en esa muestra es del 32%. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 92%, el error cometido en la estimación de la proporción en toda la población p no supere el 3%.
- b) En una muestra de 625 personas la proporción de miopes es del 30%. Calcular el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de significación del 2% para la proporción p de miopes de la población.

Soluciones

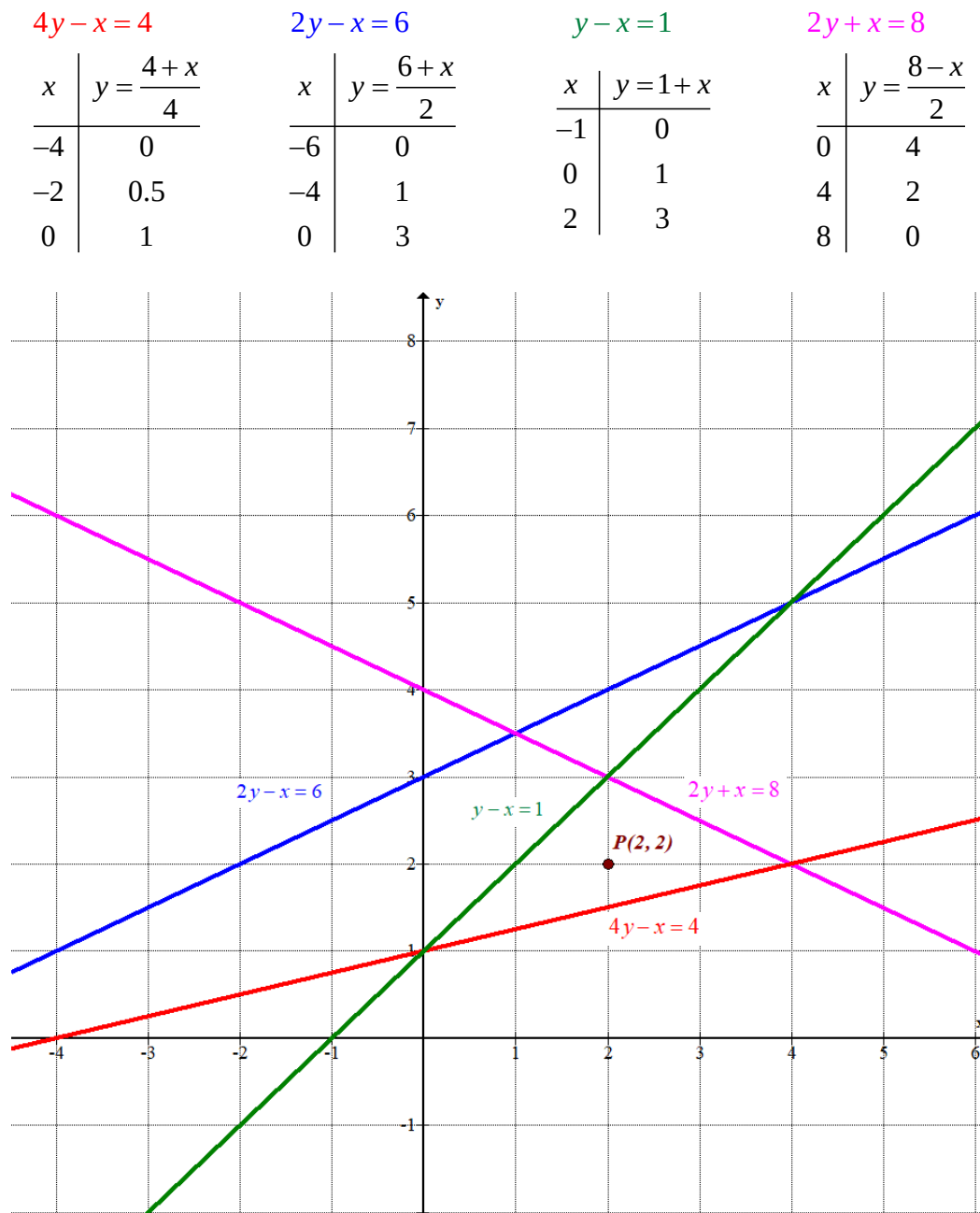
A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las cuatro inecuaciones lineales:

(i) $4y - x \geq 4$, (ii) $2y - x \leq 6$, (iii) $y - x \leq 1$, (iv) $2y + x \leq 8$

- a) Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones (i), (ii), (iii) y (iv). ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).
b) ¿Cuál es el máximo de la función $F(x, y) = 3x - 2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

a) Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.



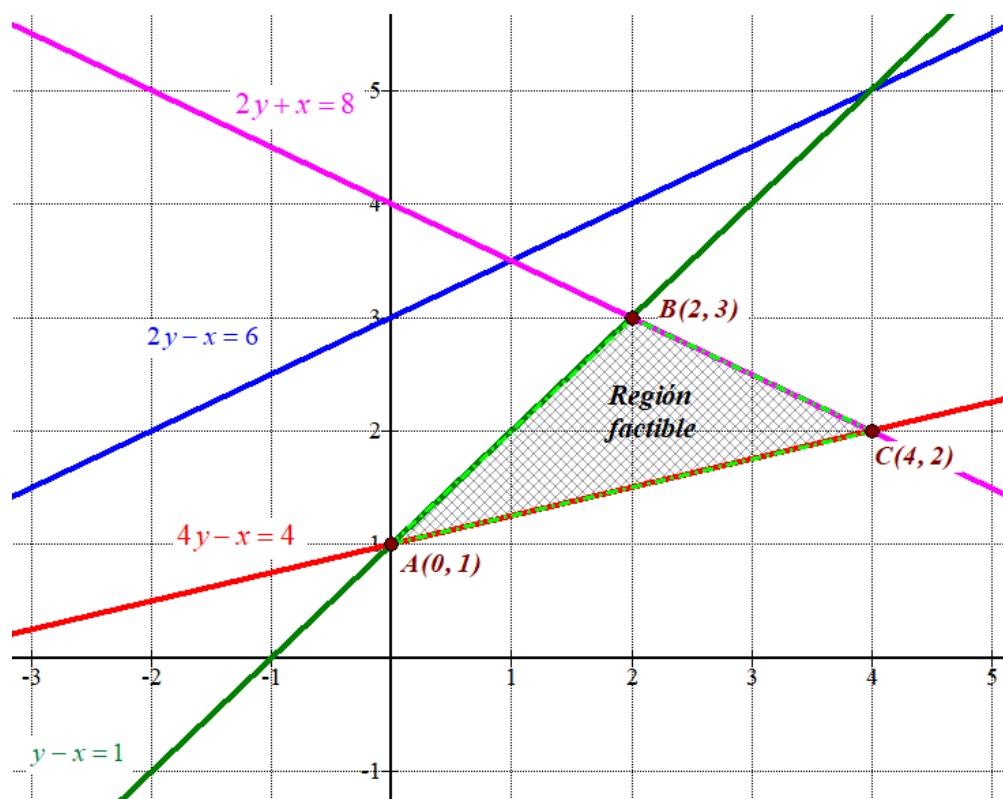
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 4y - x \geq 4 \\ \text{(ii)} \quad 2y - x \leq 6 \\ \text{(iii)} \quad y - x \leq 1 \\ \text{(iv)} \quad 2y + x \leq 8 \end{array} \right\} \text{ el recinto limitado por las inecuaciones es la}$$

región del plano situada por encima de la recta roja y por debajo de las rectas azul, verde y rosa. Comprobamos si el punto $P(2, 2)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 4 \cdot 2 - 2 \geq 4 \\ \text{(ii)} \quad 2 \cdot 2 - 2 \leq 6 \\ \text{(iii)} \quad 2 - 2 \leq 1 \\ \text{(iv)} \quad 2 \cdot 2 + 2 \leq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 8 - 2 \geq 4 \\ \text{(ii)} \quad 4 - 2 \leq 6 \\ \text{(iii)} \quad 2 - 2 \leq 1 \\ \text{(iv)} \quad 4 + 2 \leq 8 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones. Coloreamos la región factible en el siguiente dibujo.



La inecuación que no afecta a la región factible es la (ii) $2y - x \leq 6$. Como se observa en el dibujo la recta asociada a esta inecuación no es frontera de la región factible.

La inecuación (ii) la cumplen todos los puntos de la región factible, pero si se suprime de las restricciones la región factible es la misma. La inecuación (ii) es superflua.

b) Valoramos la función objetivo $F(x, y) = 3x - 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 1) \rightarrow F(0, 1) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$B(2, 3) \rightarrow F(2, 3) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$C(4, 2) \rightarrow F(4, 2) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 8 ; \text{Máximo!}$$

La función objetivo toma un valor máximo de 8 en el punto $C(4, 2)$.

A 2 (hasta 3 puntos)

En el periódico local se publican al mes x anuncios de un gimnasio, para captar abonados, siendo $0 \leq x \leq 14$. El precio por anuncio es de 300 €. El número de abonados se estima mediante la función $A(x) = -x^2 + 28x$, y cada uno paga mensualmente 100 €. Además del gasto en anuncios, el gimnasio gasta mensualmente 12.000 € en mantenimiento. El balance mensual, $f(x)$, son las cuotas de socios menos los gastos.

- a) ¿Cuál es el menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas y conseguir que el negocio sea rentable?
 b) ¿Cuántos anuncios deben contratarse para maximizar las ganancias y a cuántos euros ascienden dichas ganancias?

a) Hallamos la expresión del balance mensual dependiente de los x anuncios mensuales.

$$\begin{aligned} f(x) &= 100 \cdot A(x) - 12000 - 300x = 100 \cdot (-x^2 + 28x) - 12000 - 300x = \\ &= -100x^2 + 2800x - 12000 - 300x = -100x^2 + 2500x - 12000 \end{aligned}$$

Averiguamos cuando el balance es cero.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -100x^2 + 2500x - 12000 = 0 \Rightarrow x^2 - 25x + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 120}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{145}}{2} = \begin{cases} \frac{25 - \sqrt{145}}{2} \approx \boxed{6.48 = x} \\ \frac{25 + \sqrt{145}}{2} \approx 18.52 \notin [0, 14] \end{cases}$$

- En el intervalo $[0, 6.48]$ tomamos $x = 1$ y la función vale

$$f(1) = -100 \cdot 1^2 + 2500 \cdot 1 - 12000 = -9600 < 0. \text{ La función es negativa en el intervalo } [0, 6.48].$$

- En el intervalo $[6.48, 14]$ tomamos $x = 7$ y la función vale

$$f(7) = -100 \cdot 7^2 + 2500 \cdot 7 - 12000 = 600 > 0. \text{ La función es positiva en el intervalo } [6.48, 14].$$

El menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas es de 7 anuncios mensuales.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de $f(x)$.

$$f(x) = -100x^2 + 2500x - 12000 \Rightarrow f'(x) = -200x + 2500$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -200x + 2500 = 0 \Rightarrow x = \frac{2500}{200} = 12.5$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = -200x + 2500 \Rightarrow f''(x) = -200 \Rightarrow f''(12.5) = -200 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función presenta un máximo relativo para $x = 12.5$.

Pero el número de anuncios mensuales debe ser un número entero entre 0 y 14, por lo que valoramos la función en 12 y 13 para decidir cuando son mayores las ganancias.

$$\left. \begin{aligned} f(12) &= -100 \cdot 12^2 + 2500 \cdot 12 - 12000 = 3600 \\ f(13) &= -100 \cdot 13^2 + 2500 \cdot 13 - 12000 = 3600 \end{aligned} \right\}$$

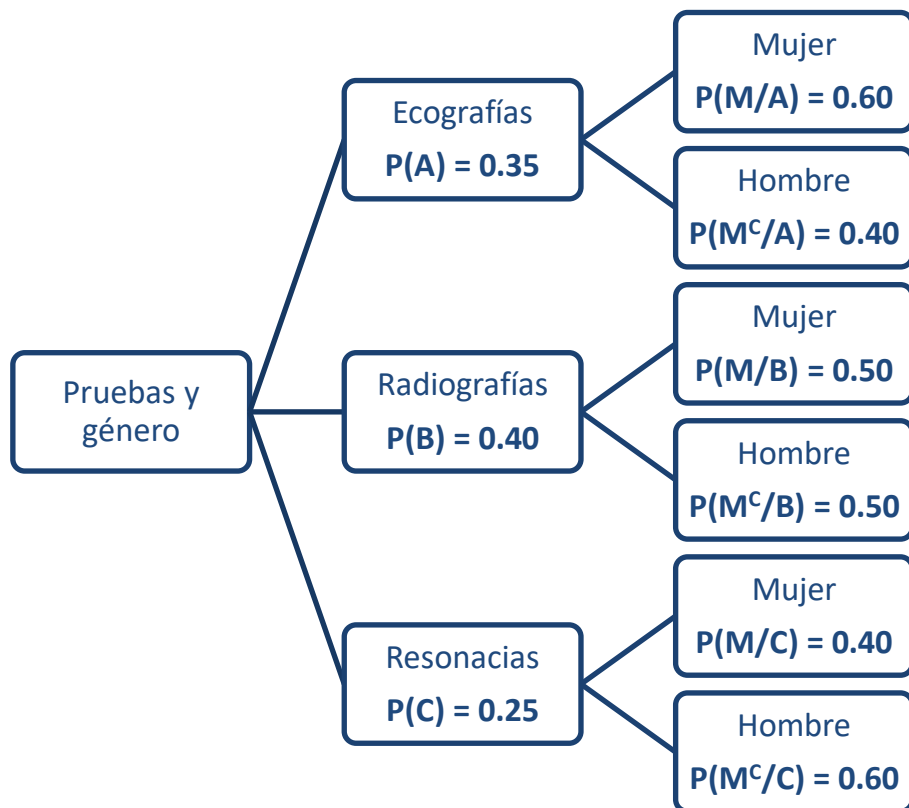
Para maximizar las ganancias se deben contratar 12 o 13 anuncios siendo estas ganancias máximas de 3600 €.

A 3 (hasta 2 puntos)

En una clínica se realizan únicamente tres tipos de servicios: ecografías, en el 35% de los casos, radiografías, en el 40% y resonancias magnéticas en el 25%. El 60% de las ecografías son de mujeres, el 50% de las radiografías son de mujeres y el 60% de las resonancias son de hombres. Si se elige un paciente al azar se pide:

- La probabilidad de que el paciente elegido haya sido mujer.
- Si el paciente elegido ha sido mujer, probabilidad de que el servicio realizado sea una ecografía.

Llamamos A, B y C a los sucesos realizarse una ecografía, radiografía o resonancia magnética, respectivamente. Llamamos M al suceso “el paciente es mujer”, por lo que el suceso complementario M^c será “el paciente es hombre”. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) = \\
 &= 0.35 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.4 = \boxed{0.51}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(A/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{P(M)} = \frac{0.35 \cdot 0.6}{0.51} = \boxed{\frac{7}{17} \approx 0.4118}$$

A 4 (hasta 2 puntos)

El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma=10$. Si seleccionamos una muestra de 625 usuarios, resulta que la media de viajes realizados por los viajeros es de 16 viajes. Contestar:

- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de significación del 4%?
- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de confianza del 98%?

a) X = El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao. $X = N(\mu, 10)$

Buscamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de significación del 4%.



$$\alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}} = 0.822$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16 - 0.822, 16 + 0.822) = (15.178, 16.822)$$

b) Buscamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 98%.



$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}} = 0.932$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16 - 0.932, 16 + 0.932) = (15.068, 16.932)$$

B 1 (hasta 3 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$, encontrar las

componentes de las matrices de dimensión 2×2 , $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

a) $AMB = C$

b) $AHB^{-1} = C$.

a) Despejamos M en la igualdad: $AMB = C \Rightarrow M = A^{-1}CB^{-1}$.

Hallamos las inversas de las matrices A y B.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{2+6} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz M.

$$\begin{aligned} M &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} -14 & 6 \\ -18 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} -28+12 & 42+6 \\ -36-44 & 54-22 \end{pmatrix} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} -16 & 48 \\ -80 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Despejamos H en la ecuación matricial: $AHB^{-1} = C \Rightarrow H = A^{-1}CB$

Obtenemos la expresión de la matriz H.

$$\begin{aligned} H &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -14 & 6 \\ -18 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -14-12 & -42+12 \\ -18+44 & -54-44 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -26 & -30 \\ 26 & -98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ -13 & 49 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B 2 (hasta 3 puntos)

Sean el polinomio cúbico $p(x) = 2x^3 + bx^2 + c$ y la parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$.

- a) Determinar los coeficientes de las incógnitas b y c para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x = 0$ y $x = 6$. Dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.
- b) Calcular el área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$, sabiendo que en su interior no hay ningún punto de corte de $p(x)$ y $q(x)$.

- a) Para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x = 0$ y $x = 6$ las dos gráficas deben coincidir para estos valores.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 2x^3 + bx^2 + c \\ q(x) = -x^2 + 6x + 10 \\ p(0) = q(0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = -0^2 + 6 \cdot 0 + 10 \Rightarrow \boxed{c = 10}$$

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 2x^3 + bx^2 + 10 \\ q(x) = -x^2 + 6x + 10 \\ p(6) = q(6) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + \cancel{10} = -6^2 + 6 \cdot 6 + \cancel{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 432 + 36b = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-432}{36} = -12}$$

Los valores buscados son $b = -12$ y $c = 10$. La función queda $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 10$.

Hallamos el tercer punto de corte de las gráficas de las funciones.

$$p(x) = q(x) \Rightarrow -x^2 + 6x + 10 = 2x^3 - 12x^2 + 10 \Rightarrow$$

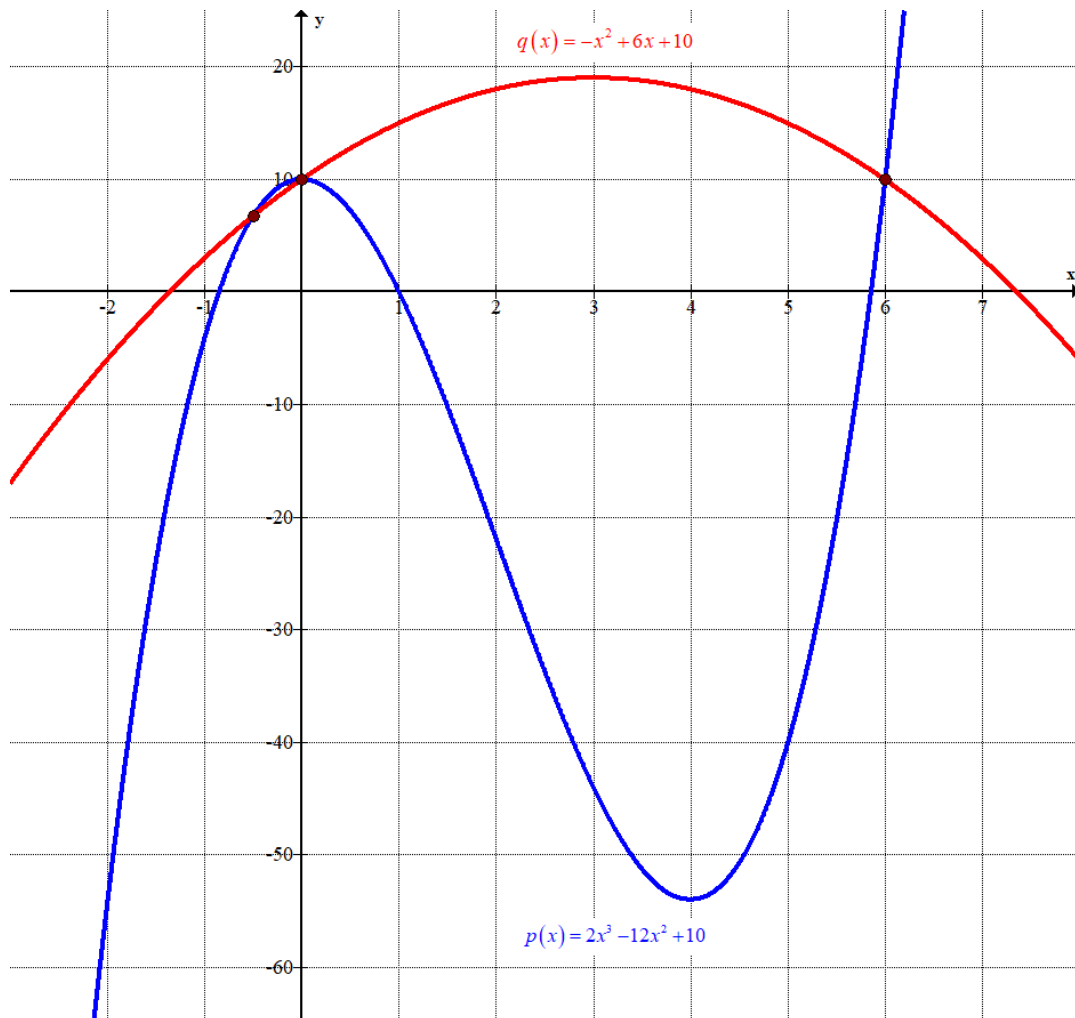
$$\Rightarrow 0 = 2x^3 - 11x^2 - 6x \Rightarrow x(2x^2 - 11x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ 2x^2 - 11x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 + 48}}{4} = \frac{11 \pm 13}{4} = \begin{cases} = \frac{11+13}{4} = \boxed{6 = x} \\ = \frac{11-13}{4} = \boxed{-0.5 = x} \end{cases} \end{array} \right.$$

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos sus gráficas.

x	$p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 10$
-0.5	6.75
0	10
1	0
6	10
7	108

x	$q(x) = -x^2 + 6x + 10$
-0.5	6.75
0	10
1	15
6	10
7	3



b) El valor del área es la integral definida de 0 a 6 de la diferencia de las dos funciones: $q(x) - p(x)$.

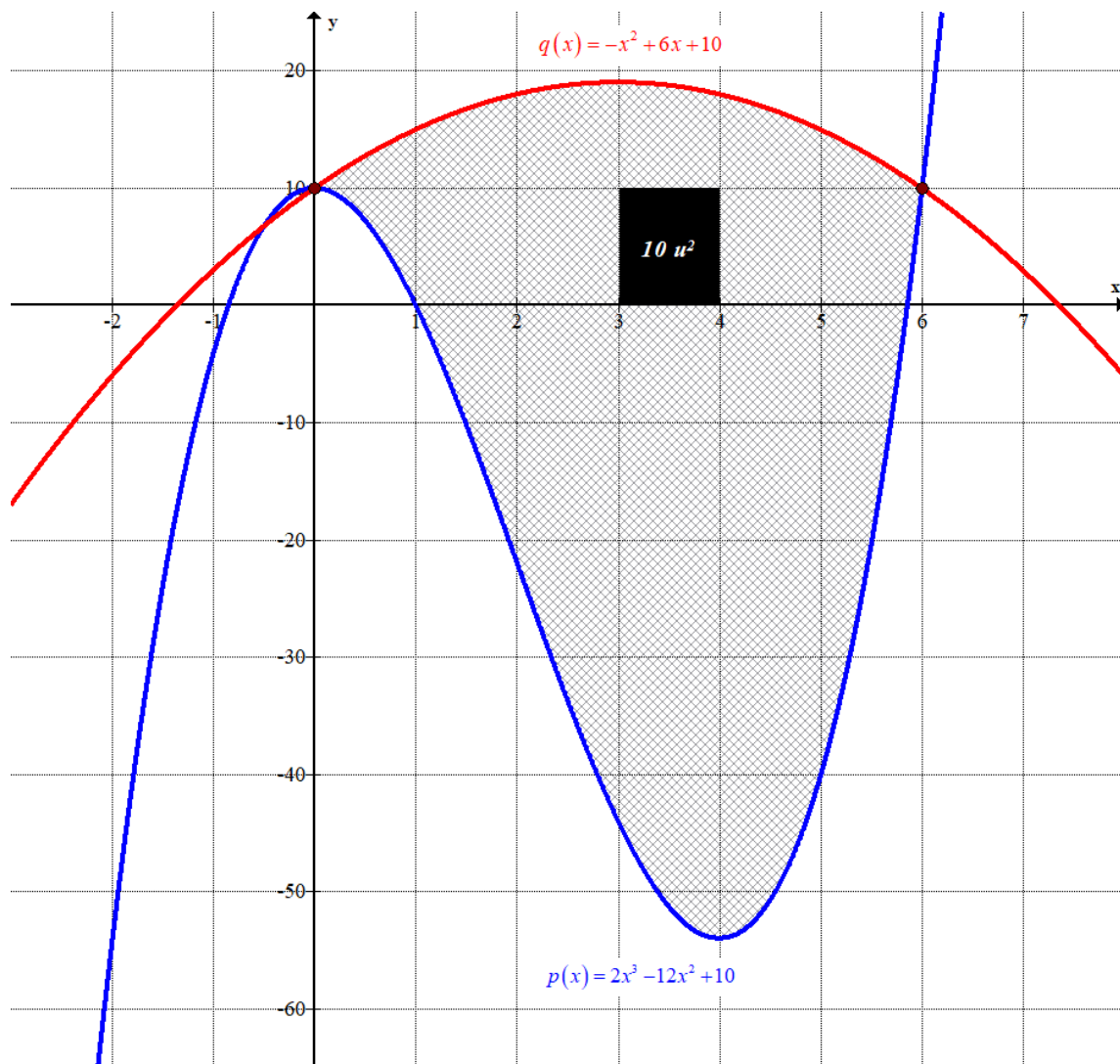
$$\text{Área} = \int_0^6 q(x) - p(x) dx = \int_0^6 -x^2 + 6x + 10 - (2x^3 - 12x^2 + 10) dx =$$

$$= \int_0^6 -2x^3 + 11x^2 + 6x dx = \left[\frac{-2x^4}{4} + \frac{11x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^6 =$$

$$= \left[\frac{-2 \cdot 6^4}{4} + \frac{11 \cdot 6^3}{3} + 3 \cdot 6^2 \right] - \left[\frac{-2 \cdot 0^4}{4} + \frac{11 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0^2 \right] = 252 \text{ u}^2$$

El área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$ tiene un valor de 252 unidades cuadradas.

Comprobamos el valor del área con el dibujo, teniendo en cuenta que cada cuadradito tiene 10 unidades cuadradas de área.



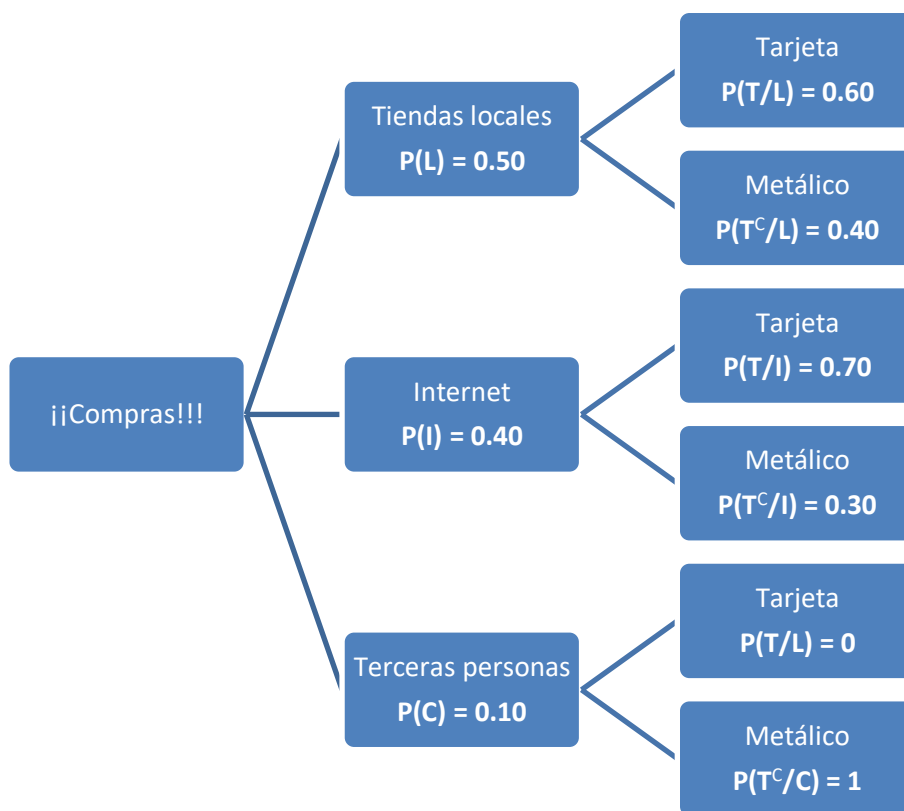
B 3 (hasta 2 puntos)

Una familia hace sus compras de la siguiente manera: el 50% en tiendas locales, el 40% por Internet y, el resto, a través de terceras personas. En las tiendas pagan en el 60% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico. En Internet pagan en el 70% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico (contra reembolso). Si compran a través de una tercera persona, siempre pagan en metálico. Si se elige una compra al azar:

- Calcular la probabilidad de que ésta se haya pagado en metálico.
- Si una compra se ha pagado con tarjeta, calcular la probabilidad de que ésta se haya hecho en una tienda.

Llamamos L al suceso “comprar en tiendas locales”, I a “comprar por internet”, C a “comprar a través de terceras personas”, T a “pagar con tarjeta” y T^C a “pagar en metálico”.

Hacemos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(T^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T^C) = P(L)P(T^C/L) + P(I)P(T^C/I) + P(C)P(T^C/C) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 1 = \boxed{0.42}$$

- b) Nos piden calcular $P(L/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(L/T) = \frac{P(L \cap T)}{P(T)} = \frac{P(L)P(T/L)}{1 - P(T^C)} = \frac{0.5 \cdot 0.6}{1 - 0.42} = \frac{15}{29} \approx 0.5172$$

B 4 (hasta 2 puntos)

Se desea estimar la proporción de personas que son miopes, para lo cual, se toma una muestra de n individuos.

- El porcentaje de miopes en esa muestra es del 32%. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 92%, el error cometido en la estimación de la proporción en toda la población p no supere el 3%.
- En una muestra de 625 personas la proporción de miopes es del 30%. Calcular el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de significación del 2% para la proporción p de miopes de la población.

a) La proporción muestral de miopes es $p = 0.32$. Tamaño de la muestra = n .

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 92% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'

Utilizando la fórmula del error:

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.75} = \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.75} \right)^2 = \frac{0.32 \cdot 0.68}{n} \Rightarrow n = \frac{0.32 \cdot 0.68}{\left(\frac{0.03}{1.75} \right)^2} \approx 740.44
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 741 personas.

b) La proporción muestral de miopes es $p = 0.30$. Tamaño de la muestra = $n = 625$.

Para un nivel de significación del 2% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$\alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$

	0	0'01	0'02	0'03
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871
2'3	0'9896	0'9898	0'9899	0'9901
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{625}} \approx 0.0426$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.3 - 0.0426, 0.3 + 0.0426) = (0.2574, 0.3426)$$