



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x, y, z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
- Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se estima que el número de enfermos de gripe en una ciudad en el instante x está definido por la función $f(x) = -3x^2 + 24x$, siempre que ésta sea positiva. La variable x se mide en semanas. Los instantes en que $f(x) = 0$ marcan el intervalo de definición de $f(x)$ y la duración de la epidemia. El número de enfermos hospitalizados se estima por la función $g(x) = -4x^2 + 44x - 96$ cuando ésta sea positiva y $g(x) = 0$ en caso contrario.

- Esboza una gráfica de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ e indica en qué puntos alcanzan su máximo cada una de ellas.
- El número de personas enfermas de gripe que permanecen en su casa se estima mediante la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Escribe la expresión de la función $h(x)$ e indica cuándo es creciente y cuándo decreciente.

A 3 (hasta 2 puntos)

Antes de acabar el curso la profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30% responden que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70% en coche y el 30% en tren. Un 45% viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60% en coche, el 30% en tren y el 10% en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60% en avión, el 30% en coche y el 10% en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

- Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.
- Si se va a desplazar en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.

A 4 (hasta 2 puntos)

La edad de los alumnos que han acabado bachillerato sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 0.35$ años. La edad media de una muestra de 120 alumnos es 18.2 años. Determinar el intervalo de confianza al 96% para la edad media de la población total de alumnos μ que han acabado ese bachillerato.



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2017ko EKAINA

JUNIO 2017

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos “P” y de tomates “T”. Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.

- Dibuja en el plano (P,T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.
- Escribe la función que calcula el beneficio $F(P,T)$ y encuentra el valor (P,T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 0$ vale $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x > 0$, $f(x) = ax + b$.

- Hallar los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a su vez corte al eje OX en $x = 3/2$.
- Encontrar los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX y calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

B 3 (hasta 2 puntos)

En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se les inocula la bacteria A y el 40% contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B y el 60% contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25% contraen neumonía. Después del experimento, se elige un ratón al azar.

- Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.
- Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.

B 4 (hasta 2 puntos)

Una sociedad deportiva hace una campaña de captación de chicos y chicas para formar equipos de fútbol en todas sus categorías entre 10 y 18 años. La edad de los presentados sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 2.5$. La media de edad en una muestra de chicos y chicas es de 13.7 años. Responder:

- ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para asegurar que el error de la estimación de la media poblacional μ no supera 0.4 años, con un nivel de confianza del 95%?
- Si la muestra fuese de 144 chicos y chicas ¿cuál sería el nuevo intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 95%?

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x, y, z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
 b) Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+6y & 2x-6 \\ -9-5y & -6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+6y=9 \\ 2x-6=z \\ -9-5y=-z \\ -6+5=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-6=z \\ -9-5y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ -9-5y=-2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ -5y=-2x+15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -2(3-2y) + 15 \Rightarrow -5y = -6 + 4y + 15 \Rightarrow -9y = 9 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3 - 2(-1) = 5} \Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 5 - 6 = 4}$$

Los valores de los parámetros son $x = 5$, $y = -1$, $z = 4$.

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz E en busca de una regularidad.

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2-2 \\ 2-2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = E^2 E = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E^4 = E^3 E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+20 & 10-10 \\ 10-10 & 20+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 5^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^5 = E^4 E = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} = 5^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E^6 = E^5 E = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+100 & 50-50 \\ 50-50 & 100+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix} = 5^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el patrón obtenido podemos decir que $E^{20} = E^{2 \cdot 10} = 5^{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se estima que el número de enfermos de gripe en una ciudad en el instante x está definido por la función $f(x) = -3x^2 + 24x$, siempre que ésta sea positiva. La variable x se mide en semanas. Los instantes en que $f(x) = 0$ marcan el intervalo de definición de $f(x)$ y la duración de la epidemia. El número de enfermos hospitalizados se estima por la función $g(x) = -4x^2 + 44x - 96$ cuando ésta sea positiva y $g(x) = 0$ en caso contrario.

- a) Esboza una gráfica de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ e indica en qué puntos alcanzan su máximo cada una de ellas.
- b) El número de personas enfermas de gripe que permanecen en su casa se estima mediante la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Escribe la expresión de la función $h(x)$ e indica cuándo es creciente y cuándo decreciente.

a) Averiguamos cuando se anula cada función para establecer su dominio.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -3x^2 + 24x \\ f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3x^2 + 24x = 0 \Rightarrow -3x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

El dominio de la función $f(x)$ es $[0, 8]$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -4x^2 + 44x - 96 \\ g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4x^2 + 44x - 96 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{11+5}{2} = 8 = x \\ \frac{11-5}{2} = 3 = x \end{cases}$$

El dominio de la función $g(x)$ es $[3, 8]$.

Las dos funciones son polinómicas de segundo grado y sus gráficas son parábolas. Determinamos el vértice de cada una de ellas.

$$f(x) = -3x^2 + 24x \Rightarrow f'(x) = -6x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$g(x) = -4x^2 + 44x - 96 \Rightarrow g'(x) = -8x + 44$$

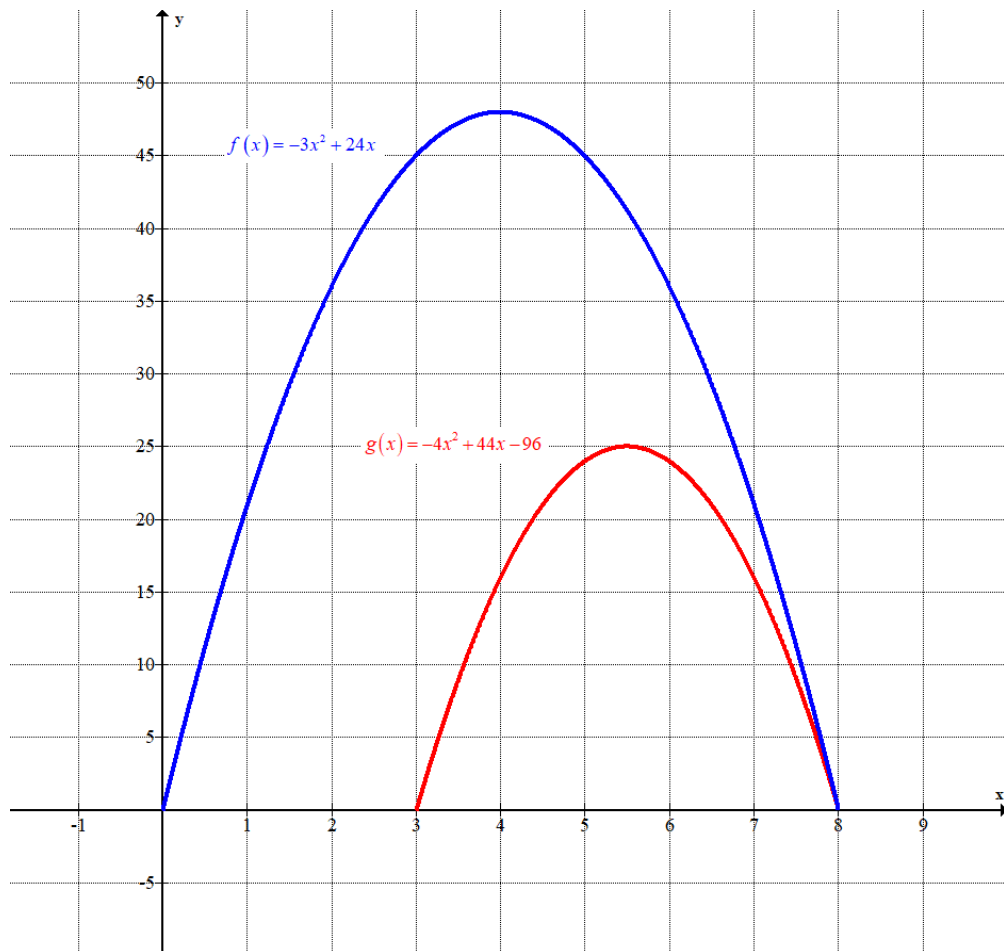
$$g'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 44 = 0 \Rightarrow 8x = 44 \Rightarrow x = \frac{44}{8} = 5.5$$

La función $f(x)$ alcanza el máximo en $x = 4$ y la función $g(x)$ alcanza el máximo en $x = 5.5$.

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos ambas gráficas.

x	$f(x) = -3x^2 + 24x$
0	0
2	36
4	48
6	36
8	0

x	$g(x) = -4x^2 + 44x - 96$
3	0
4	16
5.5	25
7	16
8	0



b) Obtenemos la expresión de $h(x) = f(x) - g(x)$. Esta función está definida entre 0 y 8, siendo una función a trozos pues $g(x)$ no está definida en el intervalo (0, 3).

$$h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} = f(x) = -3x^2 + 24x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -3x^2 + 24x - (-4x^2 + 44x - 96) = x^2 - 20x + 96 & \text{si } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función $h(x)$.

$$h(x) = \begin{cases} -3x^2 + 24x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 20x + 96 & \text{si } 3 \leq x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} -6x + 24 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2x - 20 & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -6x + 24 = 0 \rightarrow x = 4 \notin (0, 3) \\ 2x - 20 = 0 \rightarrow x = 10 \notin (3, 8) \end{cases}$$

La función $h(x)$ no tiene puntos críticos. Estudiamos su crecimiento y decrecimiento en los dos intervalos en que está dividido su dominio.

- En el intervalo $[0, 3)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale $h'(1) = -6 + 24 = 18 > 0$.
. La función crece en $(0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 8]$ consideramos $x = 4$ y la derivada vale $h'(4) = 8 - 20 = -12 < 0$.
. La función decrece en $(3, 8)$.

La función $h(x)$ es creciente en $[0, 3)$ y decreciente en $(3, 8]$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

También se podía haber razonado el crecimiento o decrecimiento de la función $h(x)$ a partir de las gráficas.

En el intervalo $[0, 3)$ la función $h(x) = f(x)$ y se aprecia en el dibujo que la función es creciente.

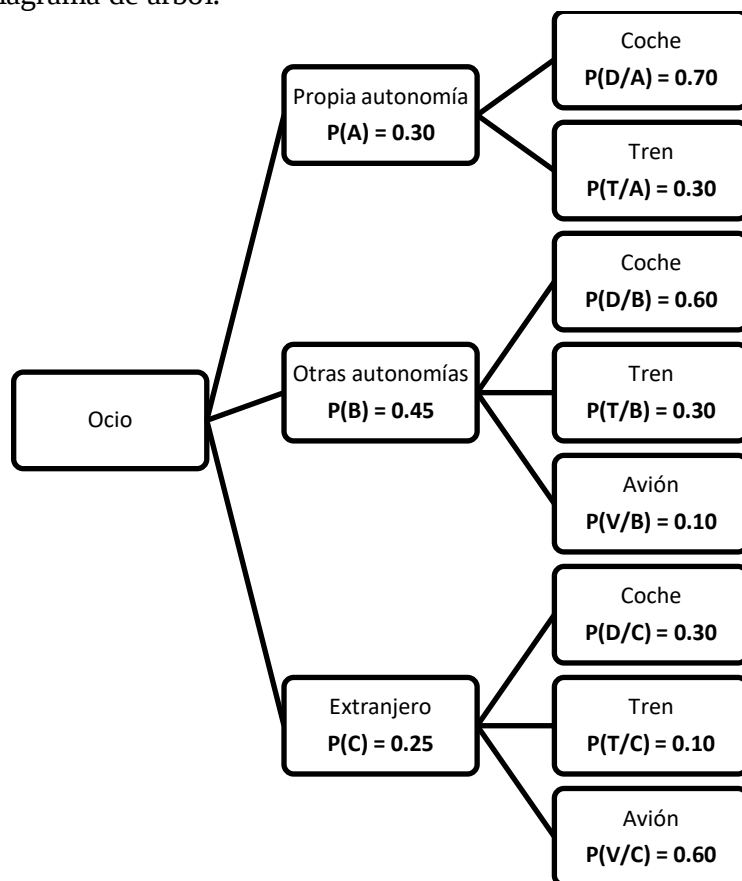
En el intervalo $(3, 8]$ la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Se aprecia que la distancia entre los puntos de la gráfica de $f(x)$ y $g(x)$ es cada vez menor, siendo 9 para $x = 3$ hasta valer 0 cuando $x = 8$. Apreciamos que en el intervalo $(3, 8]$ la función $h(x)$ decrece.

A 3 (hasta 2 puntos)

Antes de acabar el curso la profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30% responden que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70% en coche y el 30% en tren. Un 45% viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60% en coche, el 30% en tren y el 10% en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60% en avión, el 30% en coche y el 10% en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

- a) Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.
 b) Si se va a desplazar en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Calculamos la probabilidad del suceso contrario “viajar en tren”. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(A)P(T/A) + P(B)P(T/B) + P(C)P(T/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.3 + 0.45 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.1 = 0.25
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión es $1 - 0.25 = 0.75$.

- b) Nos piden calcular $P(C^c/V)$. Es una probabilidad a posteriori.

$$\begin{aligned}
 P(C^c/V) &= \frac{P(C^c \cap V)}{P(V)} = \frac{P(B)P(V/B)}{P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C)} = \\
 &= \frac{0.45 \cdot 0.1}{0.45 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.6} = \boxed{\frac{3}{13} \approx 0.2307}
 \end{aligned}$$

A 4 (hasta 2 puntos)

La edad de los alumnos que han acabado bachillerato sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma=0.35$ años. La edad media de una muestra de 120 alumnos es 18.2 años. Determinar el intervalo de confianza al 96% para la edad media de la población total de alumnos μ que han acabado ese bachillerato.

X = La edad de los alumnos que han acabado bachillerato. $X \sim N(\mu, 0.35)$

La media muestral es $\bar{x} = 18.2$ años. Tamaño de la muestra = $n = 120$ alumnos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 96% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{0.35}{\sqrt{120}} \approx 0.0657 \text{ años}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (18.2 - 0.0657, 18.2 + 0.0657) = (18.1343, 18.2657)$$

B 1 (hasta 3 puntos)

Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos “P” y de tomates “T”. Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.

- a) Dibuja en el plano (P,T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.
 b) Escribe la función que calcula el beneficio $F(P,T)$ y encuentra el valor (P,T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

a) Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Agua diaria	Siembra	Beneficio
Áreas de pimientos (P)	10P	20P	200P
Áreas de tomates (T)	20T	10T	250T
	$10P + 20T$	$20P + 10T$	$200P + 250T$

Obtenemos las restricciones;

Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno $\rightarrow 10P + 20T \leq 180 \rightarrow P + 2T \leq 18$.

El presupuesto disponible para siembra es de 160 €. $\rightarrow 20P + 10T \leq 160 \rightarrow 2P + T \leq 16$.

Un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno $\rightarrow P + T \leq 10$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow P \geq 0; T \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} P + 2T \leq 18 \\ 2P + T \leq 16 \\ P + T \leq 10 \\ P \geq 0; T \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$P + 2T = 18$$

$$2P + T = 16$$

$$P + T = 10$$

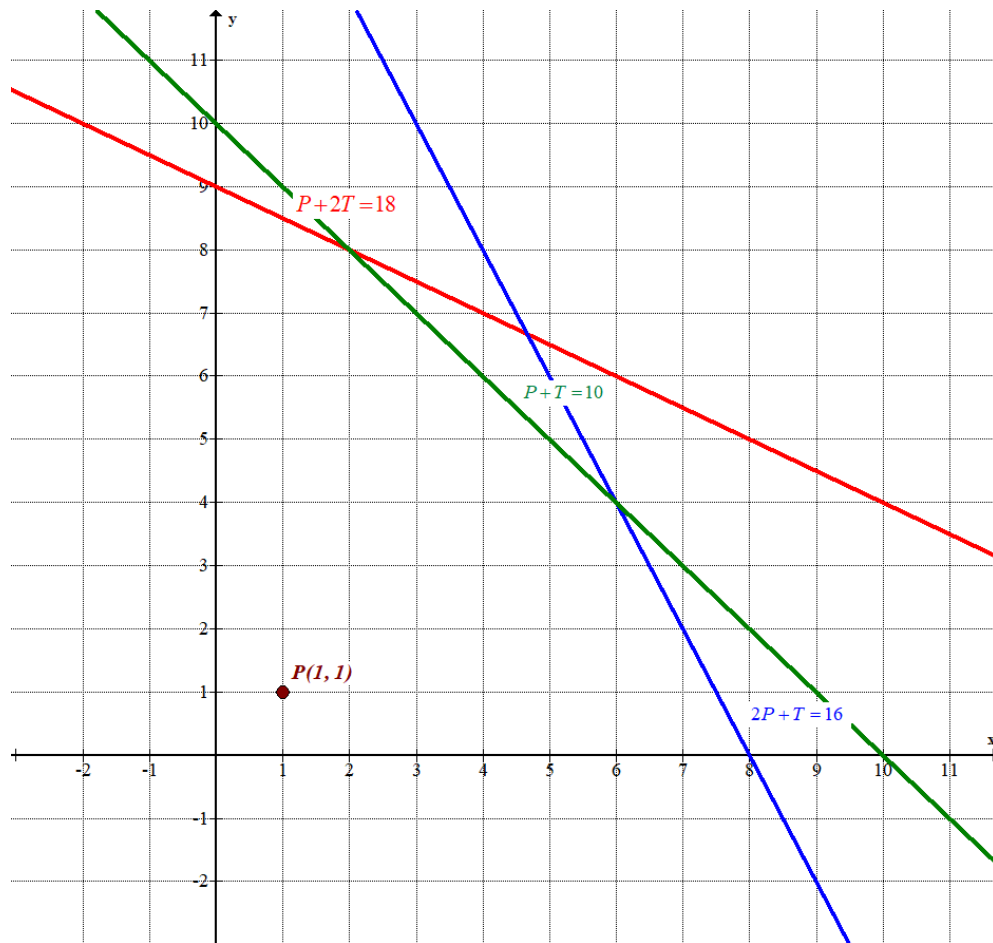
$$P \geq 0, T \geq 0$$

P	$T = \frac{18-P}{2}$
0	9
2	8
10	4

P	$T = 16 - 2P$
0	16
6	4
8	0

P	$T = 10 - P$
0	10
2	8
6	4

Primer
cuadrante



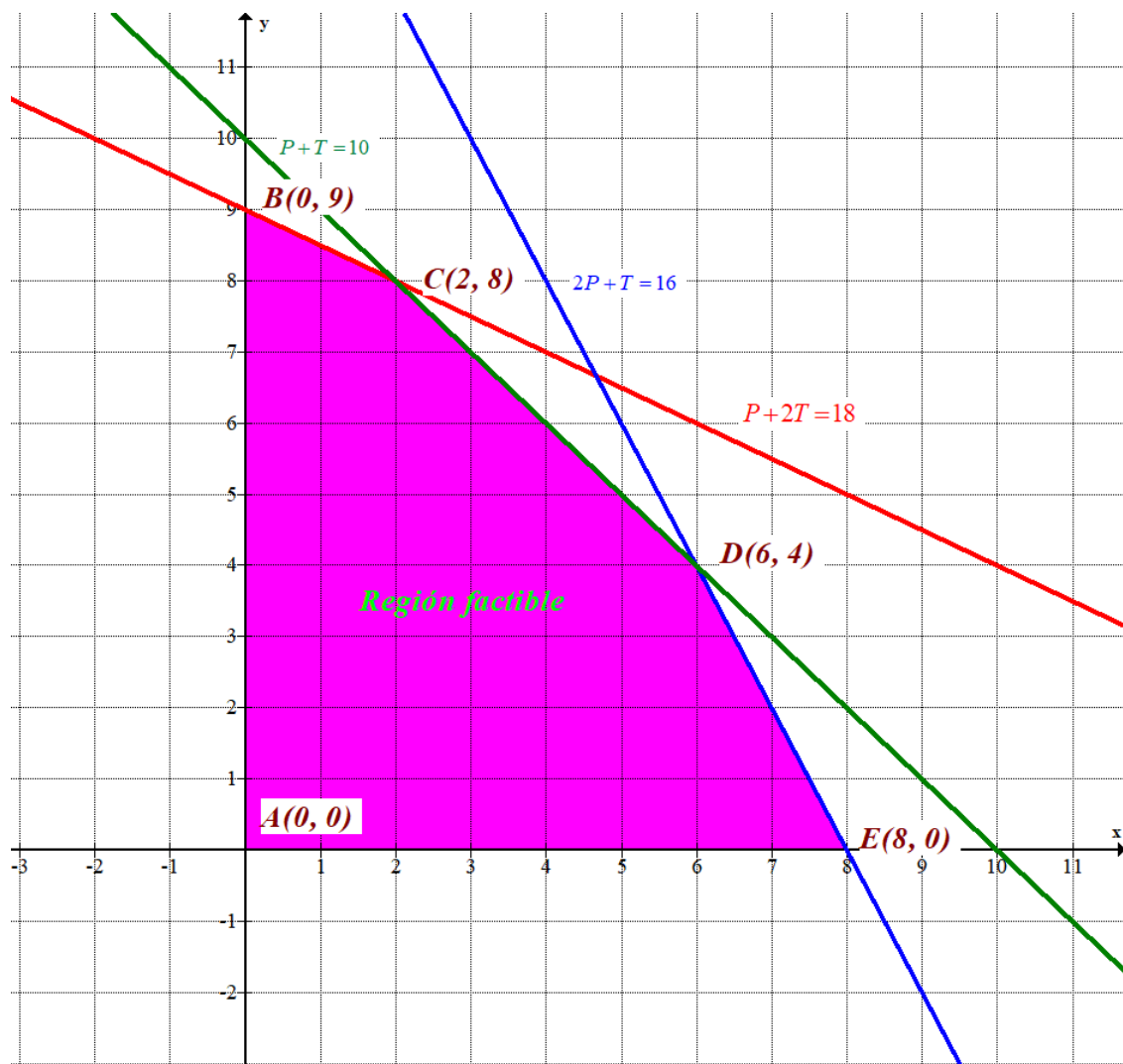
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} P + 2T \leq 18 \\ 2P + T \leq 16 \\ P + T \leq 10 \\ P \geq 0; T \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer

cuadrante situada por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 \leq 18 \\ 2 + 2 \leq 16 \\ 1 + 1 \leq 10 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona coloreada del siguiente dibujo.



- b) La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(P,T) = 200P + 250T$. Valoramos la función objetivo en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0, 9) \rightarrow B(0,9) = 200 \cdot 0 + 250 \cdot 9 = 2250$$

$$C(2, 8) \rightarrow B(2,8) = 200 \cdot 2 + 250 \cdot 8 = 2400 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(6, 4) \rightarrow B(6,4) = 200 \cdot 6 + 250 \cdot 4 = 2200$$

$$E(8, 0) \rightarrow B(8,0) = 200 \cdot 8 + 250 \cdot 0 = 1600$$

El valor máximo que alcanza la función en la región factible es 2400 euros y se consigue sembrando 2 áreas de pimientos y 9 de tomates.

B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 0$ vale $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x > 0$, $f(x) = ax + b$.

- a) Hallar los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a su vez corte al eje OX en $x = 3/2$.
 b) Encontrar los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX y calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

a) La función corta el eje OX en $x = 3/2$, por lo que $f(3/2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(3/2) = 0 \\ f(x) = ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \frac{3}{2} + b \Rightarrow \boxed{b = \frac{-3a}{2}}$$

$$\text{La función queda } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ ax - \frac{3a}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 - 2x + 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax - \frac{3a}{2} = \frac{-3a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = \frac{-3a}{2} \Rightarrow 6 = -3a \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Como $a = -2$ sustituyendo tenemos que $b = \frac{-3 \cdot (-2)}{2} = 3$.

$$\text{b) La función queda } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ -2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Encontramos los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX.

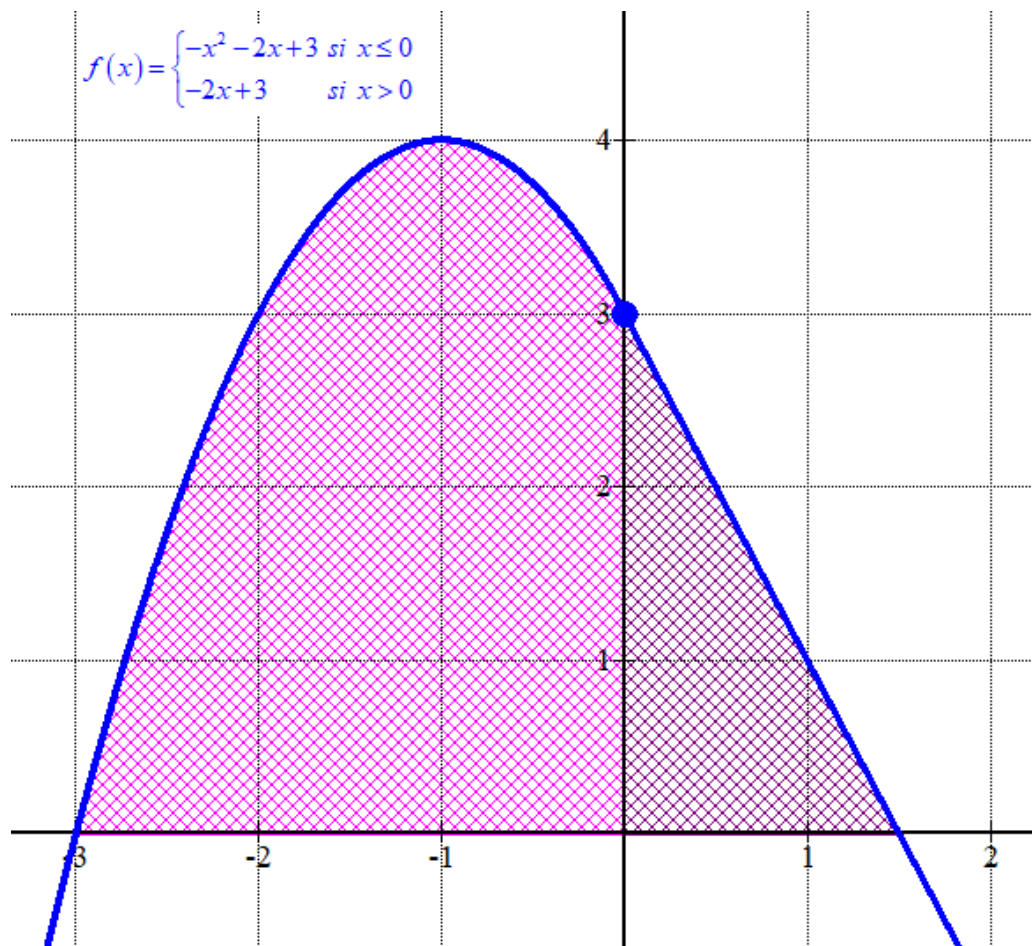
$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)3}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = \boxed{-3 = x} \\ \frac{2-4}{-2} = \mathbf{1 > 0} \end{cases} \\ -2x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}} \end{cases}$$

El área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos la calculamos como la suma de dos integrales definidas, pues la función cambia de definición $x = 0$, situado entre -3 y 1.5 .

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^{1.5} f(x) dx \right| = \dots$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 -x^2 - 2x + 3 dx &= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^0 = \\ &= \left[-\frac{0^3}{3} - 0^2 + 3 \cdot 0 \right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3) \right] = -9 + 9 + 9 = 9 \\ \int_0^{1.5} -2x + 3 dx &= \left[-x^2 + 3x \right]_0^{1.5} = \left[-1.5^2 + 3 \cdot 1.5 \right] - \left[-0^2 + 3 \cdot 0 \right] = 2.25 \end{aligned}$$

$$\dots = 9 + 2.25 = \boxed{11.25 \text{ u}^2}$$



B 3 (hasta 2 puntos)

En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se les inocular la bacteria A y el 40% contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B y el 60% contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25% contraen neumonía. Después del experimento, se elige un ratón al azar.

- a) Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.
- b) Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.

De los 100 ratones a los que se inocular la bacteria A el 40% contrae neumonía, es decir, 40 ratones del grupo A contraen neumonía.

De los 100 ratones a los que se inocular la bacteria B el 60% contrae neumonía, es decir, 60 ratones del grupo B contraen neumonía.

De los 100 ratones a los que se inocular la bacteria C el 25% contrae neumonía, es decir, 25 ratones del grupo A contraen neumonía.

En total $40 + 60 + 25 = 125$ ratones contraen la neumonía de los 300 ratones del ensayo.

- a) De 300 ratones 125 contraen neumonía, aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un ratón elegido al azar haya contraído la neumonía es de $\frac{125}{300} = \frac{5}{12} \approx 0.4167$.

- b) De los 125 ratones que han contraído la neumonía hay 60 del grupo B, aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un ratón con neumonía sea del grupo B es de $\frac{60}{125} = 0.48$.

B 4 (hasta 2 puntos)

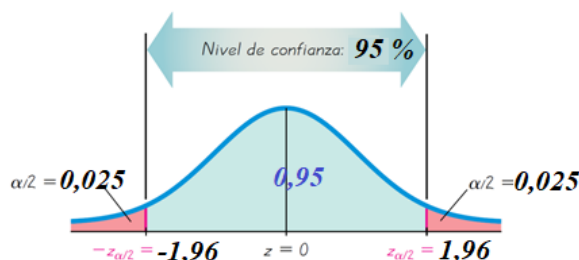
Una sociedad deportiva hace una campaña de captación de chicos y chicas para formar equipos de fútbol en todas sus categorías entre 10 y 18 años. La edad de los presentados sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 2.5$. La media de edad en una muestra de chicos y chicas es de 13.7 años. Responder:

- ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para asegurar que el error de la estimación de la media poblacional μ no supera 0.4 años, con un nivel de confianza del 95%?
- Si la muestra fuese de 144 chicos y chicas ¿cuál sería el nuevo intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 95%?

X = Edad de los chicos y chicas presentados a una selección. $X = N(\mu, 2.5)$

- La media muestral es $\bar{x} = 13.7$ años.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8079
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8341
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8576
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9293
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño mínimo de la muestra (n).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.4 = 1.96 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.4}{1.96} = \frac{2.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.5 \cdot 1.96}{0.4} \Rightarrow n = \left(\frac{2.5 \cdot 1.96}{0.4} \right)^2 = 150.0625$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 151 personas.

b) Para un nivel de confianza del 95% sabemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Calculamos el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2.5}{\sqrt{144}} \simeq 0.4083$ años.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (13.7 - 0.4083, 13.7 + 0.4083) = (13.2917, 14.1083)$$