



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: (i) La capacidad del depósito es de 10 litros; (ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, $2/3$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$; (iii) un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total. Responder las siguientes cuestiones:

- Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litros de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones (i), (ii) y (iii).
- La función $F(G, K) = 8G + 5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función de los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

A 2 (hasta 3 puntos)

Dada la función $h(x) = a + \ln(x) - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, donde la función $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x . Responder:

- ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1) = -1$?
- Dada la función $f(x) = 4 + \ln(x) - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $xf'(x) = 0$)

A 3 (hasta 2 puntos)

Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90% de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70%. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

- Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?
- Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?
- Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?

A 4 (hasta 2 puntos)

En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entre la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

- El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94%.
- ¿cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea ≤ 0.02 , con un nivel de confianza del 94%?



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2018ko UZTAILA

JULIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

- a) Calcular los parámetros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$, con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) Determinar el exponente n de la matriz A para que se cumpla:

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B 2 (hasta 3 puntos)

La siguiente función $f(x)$, mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número ($x \geq 1$) de antenas instaladas:

$$f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x.$$

- a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.
b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

B 3 (hasta 2 puntos)

De un grupo de personas sabemos que el 60% están casadas. Entre las personas casadas, el 80% tiene trabajo y, por otro lado, el 10% de las personas solteras está en paro.

- a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?
b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?

B 4 (hasta 2 puntos)

Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, 75)$. Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza $(188'18, 208'82)$ para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99%. Calcular:

- a) La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.
b) El error máximo cometido en la estimación de la media μ , si se hubiese utilizado una muestra de tamaño $n=500$ y el nivel de confianza es del 96%.

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: (i) La capacidad del depósito es de 10 litros; (ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, $\frac{2}{3}$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$; (iii) un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total. Responder las siguientes cuestiones:

- Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litros de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones (i), (ii) y (iii).
- La función $F(G, K) = 8G + 5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función de los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

a) Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones.

“La capacidad del depósito es de 10 litros” $\rightarrow K + G \leq 10$

“La cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, $\frac{2}{3}$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$ ” $\rightarrow G \geq \frac{2}{3}K$; $K \geq 0$.

“Un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total” $\rightarrow G + 0.5K \leq 8$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} K + G \leq 10 \\ G \geq \frac{2}{3}K \\ K \geq 0 \\ G + 0.5K \leq 8 \end{array} \right\}$$

Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$K + G = 10$$

$$G = \frac{2}{3}K$$

$$G + 0.5K = 8$$

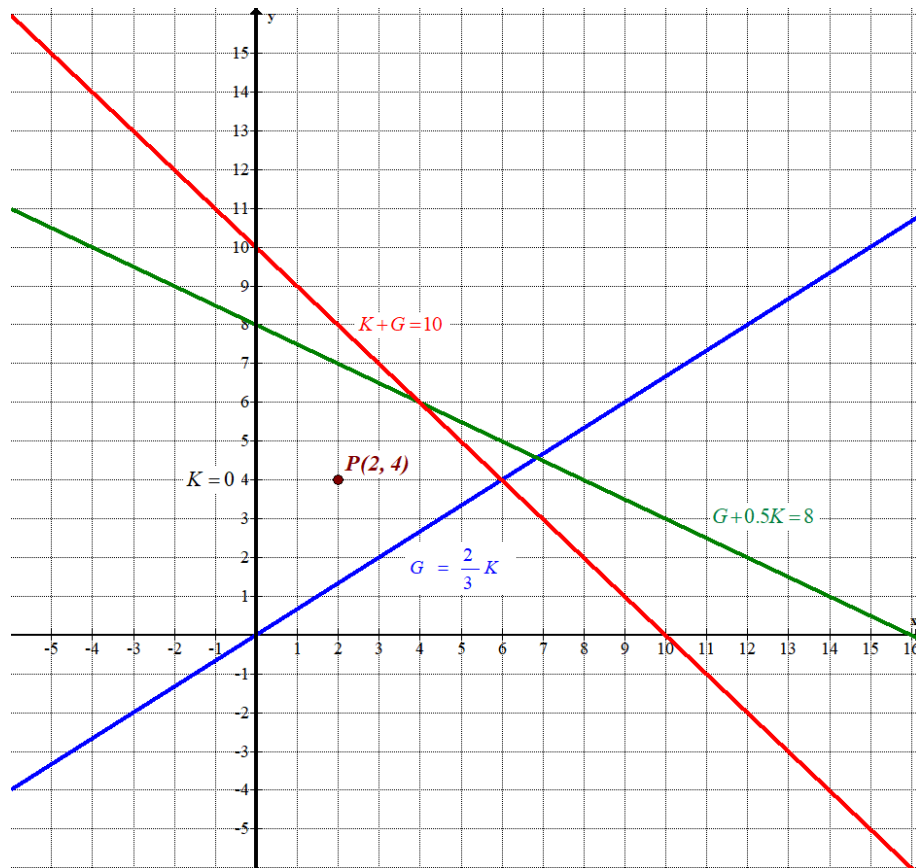
$$K = 0$$

K	$G = 10 - K$
0	10
4	6
6	4

K	$G = \frac{2}{3}K$
0	0
3	2
6	4

K	$G = 8 - 0.5K$
0	8
4	6
16	0

$K = 0$	G
0	0
0	5
0	10

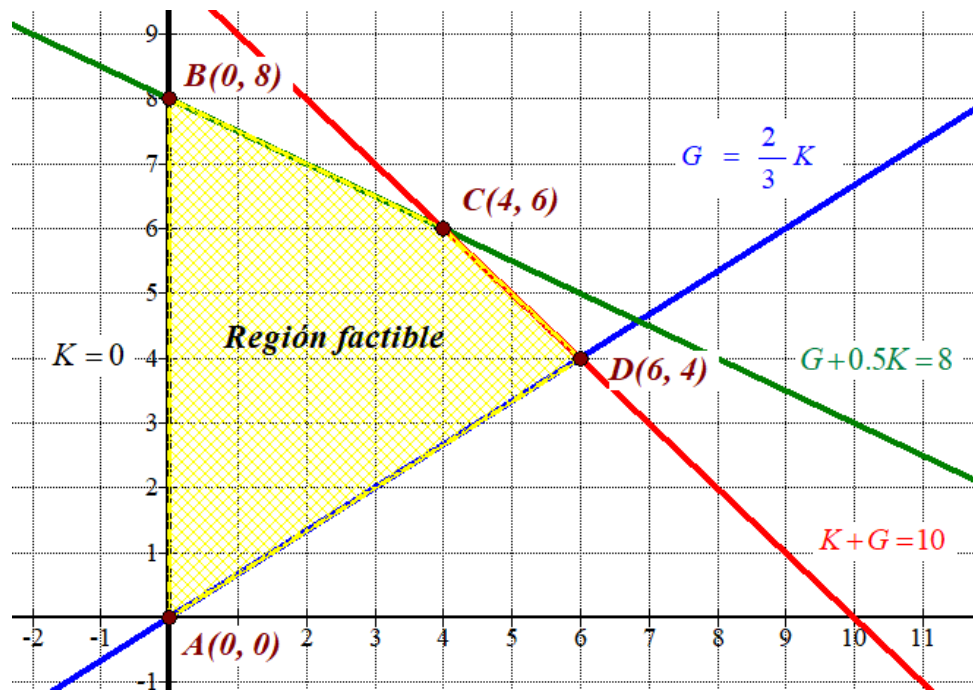


Las restricciones son $\left. \begin{array}{l} K \geq 0 \\ G \leq 10 - K \\ G \leq 8 - 0.5K \\ G \geq \frac{2}{3}K \end{array} \right\}$ y la región factible es la región del plano situada a la

derecha de la recta vertical negra, por debajo de la recta verde y roja, y por encima de la recta azul. Comprobamos si el punto $P(2, 4)$ cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 4 \leq 10 \\ 4 \geq \frac{2}{3} \cdot 2 \\ 2 \geq 0 \\ 4 + 0.5 \cdot 4 \leq 8 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones. Coloreamos la región factible en el siguiente dibujo.



b) Valoramos la función objetivo $F(G, K) = 8G + 5K$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow F(0, 0) = 0$$

$$B(0, 8) \rightarrow F(0, 8) = 8 \cdot 8 + 5 \cdot 0 = 64$$

$$C(4, 6) \rightarrow F(4, 6) = 8 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 68$$

$$D(6, 4) \rightarrow F(6, 4) = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 70 \text{ ¡Máximo!}$$

La mayor distancia que se puede recorrer cumpliendo con las restricciones es de 70 kilómetros con 6 litros de gasolina y 4 de keroseno.

A 2 (hasta 3 puntos)

Dada la función $h(x) = a + \ln(x) - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, donde la función $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x . Responder:

- a) ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1) = -1$?
- b) Dada la función $f(x) = 4 + \ln(x) - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $xf'(x) = 0$)

a) Determinamos el valor de a .

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = a + \ln(x) - 6x + 2x^2 \\ h(1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = a + \ln(1) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = a + 0 - 6 + 2 \Rightarrow \boxed{a = -1 + 6 - 2 = 3}$$

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 + \frac{1}{x} - 6 + 4x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} - 6 + 4x = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 6 - 4x \Rightarrow 1 = 6x - 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \begin{cases} \frac{6 + \sqrt{20}}{8} \approx 1.31 \in [0.01, 3] \\ \frac{6 - \sqrt{20}}{8} \approx 0.19 \in [0.01, 3] \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''\left(\frac{6 - \sqrt{20}}{8}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{6 - \sqrt{20}}{8}\right)^2} + 4 = -10 - 6\sqrt{5} < 0 \\ f''\left(\frac{6 + \sqrt{20}}{8}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{6 + \sqrt{20}}{8}\right)^2} + 4 = -10 + 6\sqrt{5} > 0 \end{array} \right.$$

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{6 - \sqrt{20}}{8}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{6 + \sqrt{20}}{8}$.

Como $f(0.19) = 4 + \ln(0.19) - 6 \cdot 0.19 + 2 \cdot 0.19^2 \approx 1.27$ las coordenadas del máximo relativo son (0.19, 1.27).

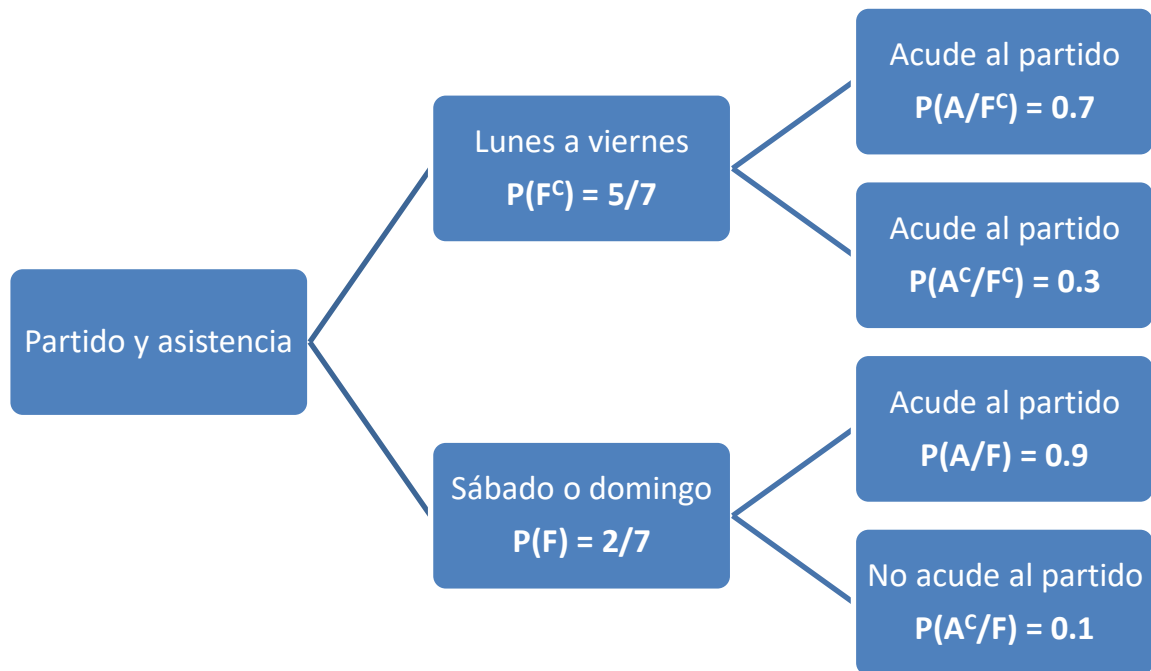
Como $f(1.31) = 4 + \ln(1.31) - 6 \cdot 1.31 + 2 \cdot 1.31^2 \approx -0.16$ las coordenadas del mínimo relativo son (1.31, -0.16).

A 3 (hasta 2 puntos)

Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90% de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70%. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

- Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?
- Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?
- Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?

Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos A = “Asistir al encuentro”, F a “el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo)”.



- a) Nos piden calcular $P(A^c / F)$. Como a los partidos del fin de semana asiste un 90 % de las veces, entonces no asiste el restante 10%. $P(A^c / F) = 0.10$

- b) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(F^c)P(A/F^c) + P(F)P(A/F) = \frac{5}{7} \cdot 0.7 + \frac{2}{7} \cdot 0.9 = \boxed{\frac{53}{70} \approx 0.757}$$

- c) Nos piden calcular $P(F / A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F / A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{P(F)P(A/F)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0.9}{53/70} = \boxed{\frac{18}{53} \approx 0.34}$$

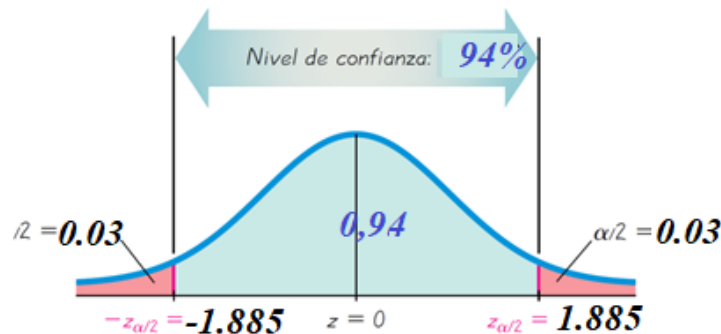
A 4 (hasta 2 puntos)

En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entre la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

- El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94%.
- ¿cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea ≤ 0.02 , con un nivel de confianza del 94%?

a) La proporción muestral de hembras es $p = \frac{175}{500} = 0.35$. Tamaño de la muestra = $n = 500$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 94% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.885$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.885 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{500}} = 0.04$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.35 - 0.04, 0.35 + 0.04) = (0.31, 0.39)$$

b) Para un nivel de confianza del 94% sabemos que $z_{\alpha/2} = 1.885$.

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.885 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.885} = \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.885} \right)^2 = \frac{0.35 \cdot 0.65}{n} \Rightarrow n = \frac{0.35 \cdot 0.65}{\left(\frac{0.02}{1.885} \right)^2} \approx 2020.9$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2021 peces.

B 1 (hasta 3 puntos)

- a) Calcular los parámetros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$, con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) Determinar el exponente n de la matriz A para que se cumpla:

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{aligned} F \cdot G &= H \cdot K \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2-2a+2b-4 & 1+a-b-3+d \\ -4-2b+4 & 2+b+3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2-2b & 4a+4-6 \\ -c-2b & 2c-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2a+2b-6 & a-b-2+d \\ -2b & 5+b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2-2b & 4a-2 \\ -c-2b & 2c-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2a+2b-6 = -2a-2-2b \\ a-b-2+d = 4a-2 \\ -2b = -c-2b \\ 5+b-d = 2c-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b = 4 \rightarrow \boxed{b=1} \\ d = 3a+b \\ 0 = -c \rightarrow \boxed{c=0} \\ b-d-2c = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3a+1 \\ 1-d-2 \cdot 0 = -11 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} d = 3a+1 \\ \boxed{12=d} \end{cases} \Rightarrow 12 = 3a+1 \Rightarrow 11 = 3a \Rightarrow \boxed{a = \frac{11}{3}} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a = \frac{11}{3}$, $b=1$, $c=0$ y $d=12$.

- b) Obtenemos las primeras potencias de A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & 0+0 \\ 0+0 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^1 & 0 \\ 0 & -2^1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 4+0 \\ 0-2 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 & 0+0 \\ 0+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & -8+0 \\ 0+4 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^5 A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-8 & 0+0 \\ 0+0 & -8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^3 & 0 \\ 0 & -2^3 \end{pmatrix}$$

Observamos que $A^2 = A^{2^1} = \begin{pmatrix} -2^1 & 0 \\ 0 & -2^1 \end{pmatrix}$, $A^4 = A^{2^2} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$, $A^6 = A^{2^3} = \begin{pmatrix} -2^3 & 0 \\ 0 & -2^3 \end{pmatrix}$

.

Como $2048 = 2^{11}$ entonces tenemos que $\begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{11} & 0 \\ 0 & -2^{11} \end{pmatrix} = A^{2^{11}} = A^{22}$.

El valor buscado es $n = 22$.

B 2 (hasta 3 puntos)

La siguiente función $f(x)$, mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número ($x \geq 1$) de antenas instaladas:

$$f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x.$$

- a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.
 b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

a) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{98}{x^2} - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{98}{x^2} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{98}{x^2} = 2 \Rightarrow 98 = 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow \{x \geq 1\} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{49} = 7}$$

Tenemos un punto crítico de la función en $x = 7$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{98}{x^2} - 2 = 98x^{-2} - 2 \Rightarrow f''(x) = (-2)98x^{-3} = \frac{-196}{x^3} \Rightarrow f''(7) = \frac{-196}{7^3} < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada sabemos que en $x = 7$ la función tiene un máximo relativo. Con la instalación de 7 antenas se consigue el máximo beneficio.

b) Averiguamos cuando se anula el beneficio.

$$f(x) = 0 \rightarrow 100 - \frac{98}{x} - 2x = 0 \Rightarrow 100x - 98 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 50x - 49 - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 50x + 49 = 0 \Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = \begin{cases} \frac{50 + 48}{2} = \boxed{49 = x} \\ \frac{50 - 48}{2} = \boxed{1 = x} \end{cases}$$

La función es continua en el intervalo de definición $[1, +\infty)$ por lo que hay que ver en que intervalo de los dos en que se divide su dominio la función es positiva.

- En el intervalo $(1, 49)$ tomamos $x = 10$ y la función vale

$$f(10) = 100 - \frac{98}{10} - 20 = 70.2 > 0. \text{ El beneficio es positivo en } (1, 49).$$

- En el intervalo $(49, +\infty)$ tomamos $x = 100$ y la función vale

$$f(100) = 100 - \frac{98}{100} - 200 = -100.98 < 0. \text{ El beneficio es negativo en } (49, +\infty).$$

Para que el beneficio sea positivo x debe estar entre 1 y 49.

B 3 (hasta 2 puntos)

De un grupo de personas sabemos que el 60% están casadas. Entre las personas casadas, el 80% tiene trabajo y, por otro lado, el 10% de las personas solteras está en paro.

- a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?
 b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?

Pasamos estos porcentajes a valores absolutos. Para ello consideramos que el grupo de personas está compuesto por 100 personas.

Nos dice el ejercicio que hay un 60% de personas casadas, por lo que hay 60 personas casadas. De ellas el 80% tiene trabajo, por lo que $60 \cdot 0.8 = 48$ personas son casadas con trabajo. Por otro lado, el 10% de las personas solteras ($100 - 60 = 40$) está en paro, por lo que $40 \cdot 0.10 = 4$ personas del grupo son solteras en paro.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Con trabajo	En paro	
Casadas	48		60
Solteras		4	
TOTALES			100

Completamos la tabla.

	Con trabajo	En paro	
Casadas	48	12	60
Solteras	36	4	40
TOTALES	84	16	100

- a) En el grupo hay 84 personas con trabajo y de ellas 48 son casadas. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir una persona con trabajo esté casada tiene un valor de $\frac{48}{84} = \frac{4}{7} \approx 0.571$.
- b) Hay 16 personas en paro, de las cuales 12 están casadas, esto es una proporción de $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$. El porcentaje de las personas que están casadas entre las que están en paro es del 75 %.

B 4 (hasta 2 puntos)

Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, 75)$. Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza $(188,18, 208,82)$ para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99%. Calcular:

- La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.
- El error máximo cometido en la estimación de la media μ , si se hubiese utilizado una muestra de tamaño $n=500$ y el nivel de confianza es del 96%.

X = El tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana. $X = N(\mu, 75)$

- La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{188.18 + 208.82}{2} = 198.5 \text{ minutos}$$

El error de la muestra es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{208.82 - 188.18}{2} = 10.32 \text{ minutos}$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934
2'5	0'9936	0'9938	0'9940	0'9942	0'9943	0'9945	0'9946	0'9947	0'9948
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño mínimo de la muestra (n).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10.32 = 2.575 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{10.32}{2.575} = \frac{75}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{75 \cdot 2.575}{10.32} \Rightarrow n = \left(\frac{75 \cdot 2.575}{10.32} \right)^2 \approx 350.2$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 350.

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 96% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846

$$\text{Calculamos el error: } Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{75}{\sqrt{500}} \approx 6.89 \text{ minutos.}$$