



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

201ko EKAINA

JUNIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$x + 2y \leq 7, \quad x + y \geq 3, \quad 2y - x \geq -4$$

- Dibuja el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y)$ cuando x e y son números enteros en el espacio de soluciones del apartado (a).

A 2 (hasta 3 puntos)

Un inversor conoce el valor que tendrán las acciones de una empresa a lo largo del año. La función $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30$ expresa dicho valor en euros, donde el tiempo t está medido en meses, $0 \leq t \leq 12$. Si inicialmente dispone de 3000 euros y durante el año puede realizar como máximo 2 operaciones de compra y 2 de venta:

- Utilizando el análisis de los máximos y mínimos de $f(t)$, deducir en qué instantes debe realizar el inversor cada compra y cada venta para que, a final de año ($t = 12$), disponga del máximo de dinero.
- ¿Cuál será el máximo beneficio que podrá obtener realizando las 4 operaciones óptimas indicadas en el apartado anterior?

Nota: Téngase en cuenta que el inversor, en cada operación, utilizará todo su dinero o todas sus acciones.

A 3 (hasta 2 puntos)

Un banco diseña diversos tipos de préstamos para empresas y particulares. A estos últimos les fueron concedidos el 60% del total. Pasado un tiempo, el banco no recuperó el 6% de los créditos a empresas y el 20% de los particulares.

- Si se selecciona un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea moroso?
- Entre los créditos que son morosos, ¿qué probabilidad corresponden a empresas?

A 4 (hasta 2 puntos)

En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde $\sigma = 300$ ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza de (740,820) para esa media " μ ", con $n_c = 95\%$. Se pide:

- La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- El error cometido en el cálculo de " μ ", si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y $n_c = 86\%$.



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

2018ko EKAINA

JUNIO 2018

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

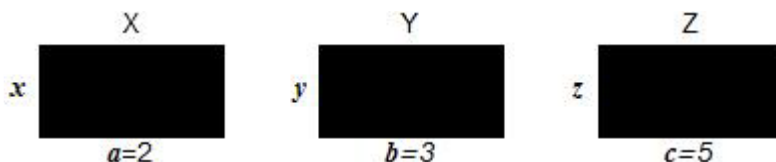
OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

a) Dadas las matrices: $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determinar el valor de las

componentes $x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.

b) Se conoce la longitud, $a=2$, $b=3$ y $c=5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (NO dibujados a escala) y la otra no, x , y , z . Determinar x , y , z para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 3$ vale $f(x) = ax + b$ y cuando $x \geq 3$ vale $f(x) = cx^2 + dx + e$, donde a , b , c , d y e son parámetros desconocidos. Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=4$ y la función y su derivada en $x=3$ valen respectivamente $f(3) = 3$ y $f'(3) = 2$:

- Hallar los valores de los parámetros a , b , c , d y e que determinan la función $f(x)$.
- Obtener las coordenadas de los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX y calcular la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$.

B 3 (hasta 2 puntos)

En una urna hay 15 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular:

- Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- Extrayendo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
- Si se extrae primero una bola, y luego otra, siendo la primera negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también negra?
- Si se extrae una bola y luego otra, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

B 4 (hasta 2 puntos)

Un estudio, sobre el número de fumadores de una zona a partir de una muestra de tamaño 361, señala que la proporción muestral de fumadores es del 35%. Con estos datos se pide calcular:

- ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95%?
- ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza al 99% sea de 0'12?

Soluciones

A 1 (hasta 3 puntos)

Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$x + 2y \leq 7, \quad x + y \geq 3, \quad 2y - x \geq -4$$

- Dibuja el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y)$ cuando x e y son números enteros en el espacio de soluciones del apartado (a).

a) Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 7$$

$$x + y = 3$$

$$2y - x = -4$$

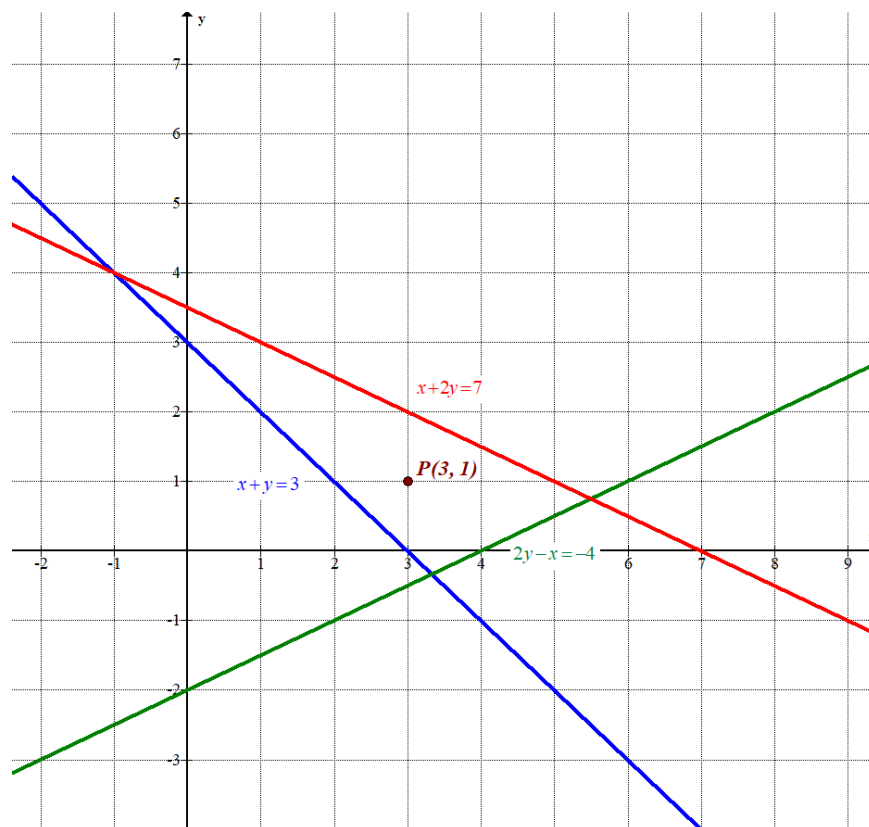
$$x \geq 0, y \geq 0$$

x	$y = \frac{7-x}{2}$
0	3.5
3	2
7	0

x	$y = 3 - x$
0	3
2	1
3	0

x	$y = \frac{x-4}{2}$
0	-2
2	-1
4	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

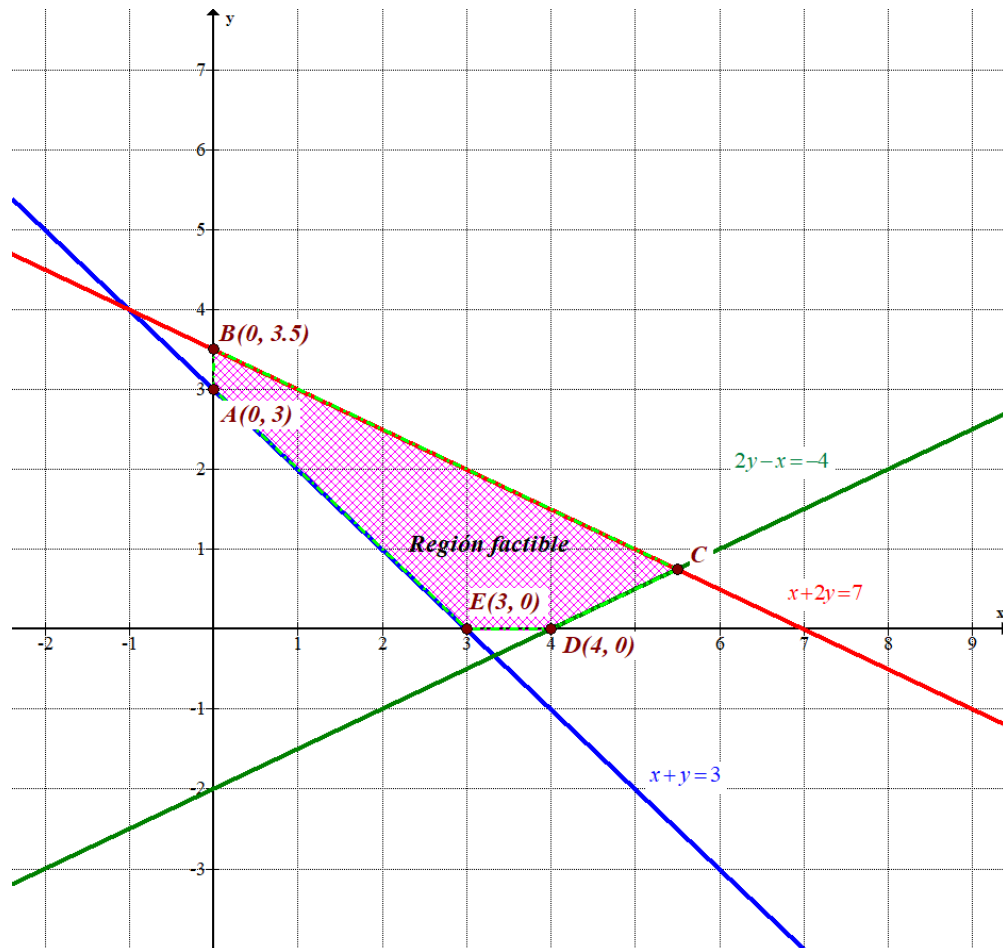
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 7 \\ x + y \geq 3 \\ 2y - x \geq -4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante situada por encima de las rectas azul y verde y por debajo de la recta roja.

Comprobamos si el punto $P(3, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 2 \cdot 1 \leq 7 \\ 3 + 1 \geq 3 \\ 2 \cdot 1 - 3 \geq -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 \leq 7 \\ 4 \geq 3 \\ -1 \geq -4 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona coloreada del siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 2y - x = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 7 - 2y \\ 2y - x = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y - 7 + 2y = -4 \Rightarrow 4y = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 7 - 2 \cdot \frac{3}{4} = 5.5 \Rightarrow C(5.5, 0.75)$$

b) Valoramos la función objetivo $F(x, y) = 2x + 3y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 3) \rightarrow F(0, 3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$B(0, 3.5) \rightarrow F(0, 3.5) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3.5 = 10.5$$

$$C(5.5, 0.75) \rightarrow F(5.5, 0.75) = 2 \cdot 5.5 + 3 \cdot 0.75 = 13.25 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$$

$$E(3, 0) \rightarrow F(0, 3) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6$$

El valor máximo de la función en la región factible es 13.25 y se consigue en el punto $C(5.5, 0.75)$.

- c) Si los valores deben ser enteros el vértice solución del problema no será válido. El punto cercano a C y situados en las rectas que delimitan la región es (5, 1) y próximo a B es (1, 3). Volvemos a valorar la función en A, D, E y los dos nuevos puntos.

$$A(0, 3) \rightarrow F(0, 3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$B(1, 3) \rightarrow F(1, 3) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$$

$$C(5, 1) \rightarrow F(5, 1) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$$

$$E(3, 0) \rightarrow F(0, 3) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6$$

El valor máximo de la función en la región factible debiendo ser valores enteros es 13 y se consigue en el punto (5, 1).

A 2 (hasta 3 puntos)

Un inversor conoce el valor que tendrán las acciones de una empresa a lo largo del año. La función $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30$ expresa dicho valor en euros, donde el tiempo t está medido en meses, $0 \leq t \leq 12$. Si inicialmente dispone de 3000 euros y durante el año puede realizar como máximo 2 operaciones de compra y 2 de venta:

- Utilizando el análisis de los máximos y mínimos de $f(t)$, deducir en qué instantes debe realizar el inversor cada compra y cada venta para que, a final de año ($t = 12$), disponga del máximo de dinero.
- ¿Cuál será el máximo beneficio que podrá obtener realizando las 4 operaciones óptimas indicadas en el apartado anterior?

Nota: Téngase en cuenta que el inversor, en cada operación, utilizará todo su dinero o todas sus acciones.

- Averiguamos cuando sea anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(t) = t^2 - 10t + 16 \\ f'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = 8 = x \\ \frac{10-6}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(t) = t^2 - 10t + 16 \Rightarrow f''(t) = 2t - 10 \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 2 \cdot 2 - 10 = -6 < 0 \\ f''(8) = 2 \cdot 8 - 10 = 6 > 0 \end{cases}$$

Al ser negativa la segunda derivada la función tiene un máximo relativo en $x = 2$ (febrero) y al ser positiva la segunda derivada tiene un mínimo relativo en $x = 8$ (agosto).

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos.

$$f(0) = 0^3/3 - 5 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 + 30 = 30$$

$$f(2) = 2^3/3 - 5 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 + 30 = 134/3 \approx 44.667$$

$$f(8) = 8^3/3 - 5 \cdot 8^2 + 16 \cdot 8 + 30 = \frac{26}{3} = 8.6667$$

$$f(12) = 12^3/3 - 5 \cdot 12^2 + 16 \cdot 12 + 30 = 78$$

Debe comprar acciones en los meses de cotización baja: enero y agosto. Debe vender en meses de cotización alta: febrero y diciembre.

- Al comienzo del año (30 € por acción) compra 3000 euros de acciones que supone comprar $\frac{3000}{30} = 100$ acciones.

En febrero ($\frac{134}{3}$ € por acción) vende las 100 acciones obteniendo $100 \cdot \frac{134}{3} = \frac{13400}{3}$, aproximadamente 4466.667 euros.

En agosto ($\frac{26}{3}$ € por acción) compramos acciones obteniendo $\frac{13400/3}{26/3} = \frac{6700}{13} \simeq 515.38$,
no da exacto, por lo que compra 515 acciones por un valor de $515 \cdot \frac{26}{3} = 4463.333$ €,
sobrando 3.33 €.

En diciembre (78 € por acción) vende todas las acciones obteniendo $515 \cdot 78 = 40170$ €
que sumándole el sobrante de la compra anterior dispone a final de año de 40173.33 €.
El beneficio que obtiene es de $40173.33 - 3000 = 37173.33$ €.

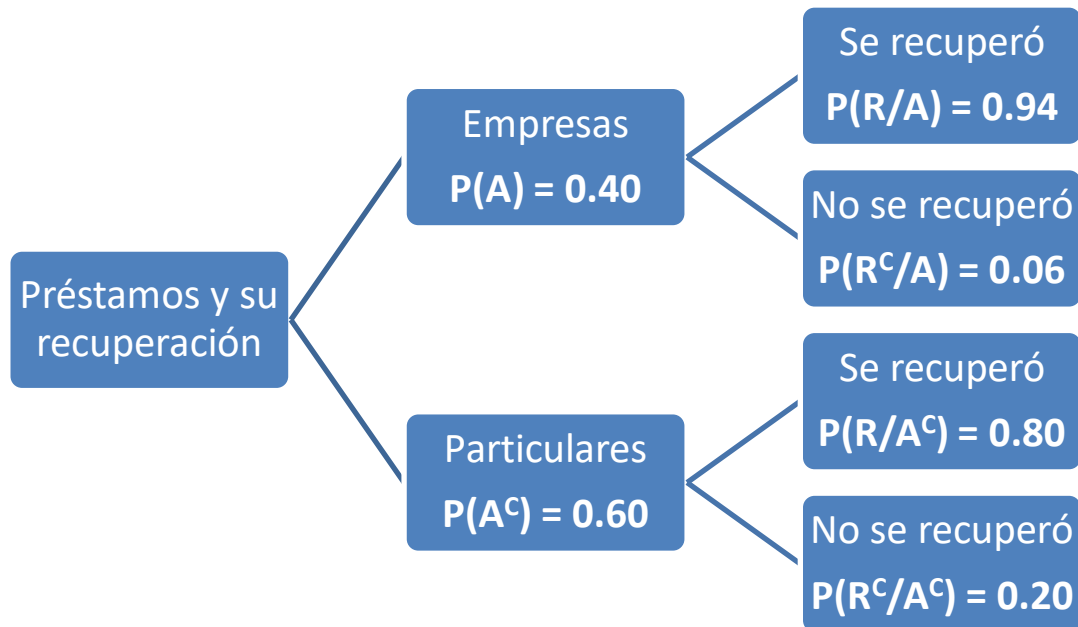
A 3 (hasta 2 puntos)

Un banco diseña diversos tipos de préstamos para empresas y particulares. A estos últimos les fueron concedidos el 60% del total. Pasado un tiempo, el banco no recuperó el 6% de los créditos a empresas y el 20% de los particulares.

a) Si se selecciona un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea moroso?

b) Entre los créditos que son morosos, ¿qué probabilidad corresponden a empresas?

Realizamos un diagrama de árbol describiendo el experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular $P(R^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R^c) = P(A)P(R^c/A) + P(A^c)P(R^c/A^c) = 0.4 \cdot 0.06 + 0.6 \cdot 0.2 = \boxed{0.144}$$

b) Nos piden calcular $P(A/R^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/R^c) = \frac{P(A \cap R^c)}{P(R^c)} = \frac{P(A)P(R^c/A)}{P(R^c)} = \frac{0.4 \cdot 0.06}{0.144} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.16667}$$

A 4 (hasta 2 puntos)

En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde $\sigma=300$ ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza de (740,820) para esa media " μ ", con $n_c = 95\%$. Se pide:

- La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- El error cometido en el cálculo de " μ ", si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y $n_c = 86\%$.

X = El tiempo en milisegundos de respuesta a señales luminosas. $X = N(\mu, 300)$

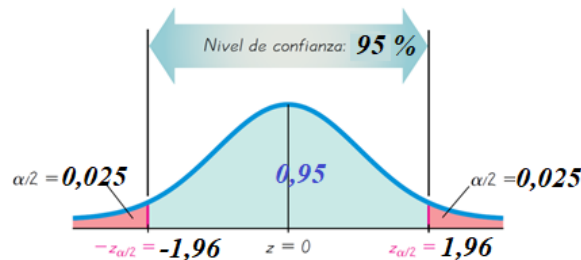
- La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{740 + 820}{2} = 780 \text{ ms}$$

El error de la muestra es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{820 - 740}{2} = 40 \text{ ms}$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6065
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6444
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8079
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8341
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8791
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9293
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño mínimo de la muestra (n).

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 40 = 1.96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{40}{1.96} = \frac{300}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{300 \cdot 1.96}{40} \Rightarrow n = \left(\frac{300 \cdot 1.96}{40} \right)^2 = 216.09$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 217 pacientes.

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 86% el valor de $z_{\alpha/2}$.



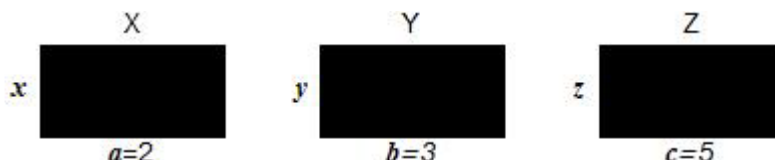
$$1 - \alpha = 0.86 \rightarrow \alpha = 0.14 \rightarrow \alpha/2 = 0.07 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.93 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.47 + 1.48}{2} = 1.475$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429

Calculamos el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.475 \cdot \frac{300}{\sqrt{64}} = 55.3125$ milisegundos.

B 1 (hasta 3 puntos)

- a) Dadas las matrices: $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determinar el valor de las componentes $x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.
- b) Se conoce la longitud, $a=2$, $b=3$ y $c=5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (NO dibujados a escala) y la otra no, x , y , z . Determinar x , y , z para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



- a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$R^2 = S \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 3 + 3x & 3x + 9y \\ -x + x^2 - 3y + 3xy & -3 + 3x + 9y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 3 = 1 \\ 3x + 9y = -15 \\ x^2 - x - 3y + 3xy = 0 \\ -3 + 3x + 9y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{2} = 1 = x \\ \frac{-3-5}{2} = -4 < 0 \end{cases} \\ x + 3y = -5 \\ x^2 - x - 3y + 3xy = 0 \\ 3x + 9y^2 = \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 3y = -5 \rightarrow 3y = -6 \rightarrow y = -2 \\ 1^2 - 1 - 3y + 3y = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ 3 + 9y^2 = 39 \rightarrow 9y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

Los valores buscados son $x=1$ e $y=-2$.

- b) La suma del área de los tres rectángulos vale 64 $\rightarrow 2x + 3y + 5z = 64$

La suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 $\rightarrow$

$$2x + 2 \cdot 2 + 2y + 2 \cdot 3 = 34 \rightarrow 2x + 2y + 10 = 34 \rightarrow x + y = 12$$

La suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48 $\rightarrow$

$$2x + 4 + 2 \cdot 3y = 48 \rightarrow 2x + 6y = 44 \rightarrow x + 3y = 22.$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 64 \\ x + y = 12 \\ x + 3y = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 64 \\ x + 3y = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(12 - y) + 3y + 5z = 64 \\ 12 - y + 3y = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 24 - 2y + 3y + 5z = 64 \\ 2y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 5z = 40 \\ y = \frac{10}{2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 + 5z = 40 \Rightarrow 5z = 35 \Rightarrow \boxed{z = 7} \\ \boxed{x = 12 - 5 = 7} \end{array} \right.$$

La solución es $x = 7$, $y = 5$, $z = 7$.

B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 3$ vale $f(x) = ax + b$ y cuando $x \geq 3$ vale $f(x) = cx^2 + dx + e$, donde a, b, c, d y e son parámetros desconocidos. Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=4$ y la función y su derivada en $x=3$ valen respectivamente $f(3)=3$ y $f'(3)=2$:

- a) Hallar los valores de los parámetros a, b, c, d y e que determinan la función $f(x)$.
 b) Obtener las coordenadas de los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX y calcular la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$.

- a) Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=4$ entonces la derivada se anula para este valor $\rightarrow f'(4)=0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2cx + d \\ f'(4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow 8c + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -8c}$$

La función queda $f(x) = cx^2 - 8cx + e$ cuando $x \geq 3$.

Como $f(3)=3$ entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = cx^2 - 8cx + e \\ f(3) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = c \cdot 3^2 - 8c \cdot 3 + e \Rightarrow 3 = 9c - 24c + e \Rightarrow \boxed{3 + 15c = e}$$

La función queda $f(x) = cx^2 - 8cx + 3 + 15c$ cuando $x \geq 3$.

Como $f'(3)=2$ existe la derivada y la función debe ser continua en 3, por lo que deben coincidir los límites laterales.

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} cx^2 - 8cx + 3 + 15c = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax + b = 3a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = 3 - 3a}$$

La función queda $f(x) = ax + 3 - 3a$ cuando $x \leq 3$.

Como $f'(3)=2$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 - 3a & \text{si } x \leq 3 \\ cx^2 - 8cx + 3 + 15c & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 3 \\ 2cx - 8c & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} a = a \\ f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2cx - 8c = 6c - 8c = -2c \\ f'(3^-) = f'(3^+) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -2c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 2} \\ -2c = 2 \rightarrow \boxed{c = -1} \end{cases}$$

Sustituyendo en las expresiones obtenidas previamente obtenemos los valores de b, d y e .

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ c = -1 \\ d = -8c \\ e = 3 + 15c \\ b = 3 - 3a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 3 - 3 \cdot 2 = -3 \\ d = -8(-1) = 8 \\ e = 3 + 15(-1) = -12 \end{array} \right\}$$

Los parámetros buscados son $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$, $d = 8$ y $e = -12$.

b) La función queda $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 - 3 \cdot 2 & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x + 3 - 15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 12 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$.

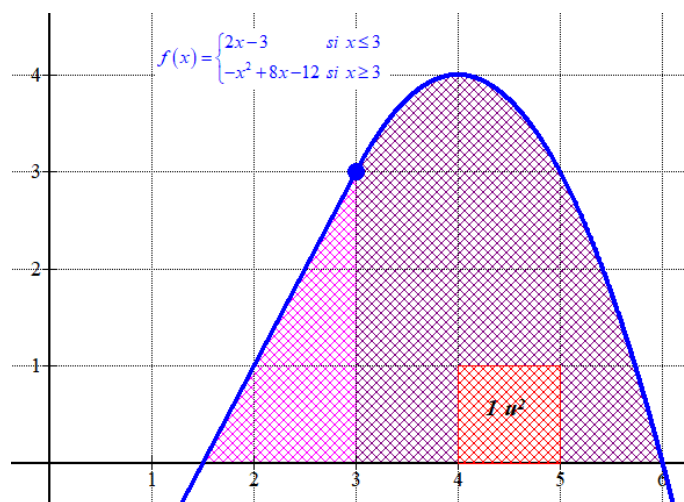
Hallamos los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX ($y = 0$).

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \in (-\infty, 3) \\ -x^2 + 8x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-1)(-12)}}{-2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} = \begin{cases} 2 \notin (3, +\infty) \\ 6 \in (3, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte son $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $Q(6, 0)$.

Como la función cambia de definición en $x = 3$ la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$ es la suma de dos integrales definidas.

$$\begin{aligned} \int_{1.5}^6 f(x) dx &= \int_{1.5}^3 2x - 3 dx + \int_3^6 -x^2 + 8x - 12 dx = \left[x^2 - 3x \right]_{1.5}^3 + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x \right]_3^6 = \\ &= [3^2 - 3 \cdot 3] - [1.5^2 - 3 \cdot 1.5] + \left[-\frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6 \right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \right] = \\ &= 0 - 2.25 + 4.5 - 72 + 144 - 72 + 9 - 36 + 36 = \boxed{11.25} \end{aligned}$$



B 3 (hasta 2 puntos)

En una urna hay 15 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular:

- Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- Extrayendo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
- Si se extrae primero una bola, y luego otra, siendo la primera negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también negra?
- Si se extrae una bola y luego otra, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

a) La urna contiene 20 bolas de las cuales 15 son blancas, aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al extraer una bola de la urna sea blanca es $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75$.

b) Si extraemos dos bolas de la urna para que las dos sean blancas debe ser la primera bola blanca y la segunda bola extraída de las 19 bolas restantes también debe ser blanca. La probabilidad de que la primera bola sea blanca es 0.75 y de que la segunda sea blanca después de haber extraído una bola blanca (quedan 14 bolas blancas) de la urna es $\frac{14}{19}$.

La probabilidad del suceso es $\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38} \approx 0.5526$.

c) Si la primera bola extraída es negra y no la devolvemos a la urna entonces nos quedan 19 bolas dentro, siendo 4 las bolas negras. La probabilidad de que la segunda sea también negra es $\frac{4}{19} \approx 0.21$.

d) El suceso “las dos bolas extraídas son de distinto color” es el complementario del suceso “las dos bolas extraídas son del mismo color”. La probabilidad de extraer dos bolas del mismo color es la suma de la probabilidad de que las dos bolas sean blancas y la de que las dos bolas sean negras: $\frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} + \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{23}{38}$.

La probabilidad de que al extraer dos bolas sean de distinto color es: $1 - \frac{23}{38} = \frac{15}{38} \approx 0.395$.

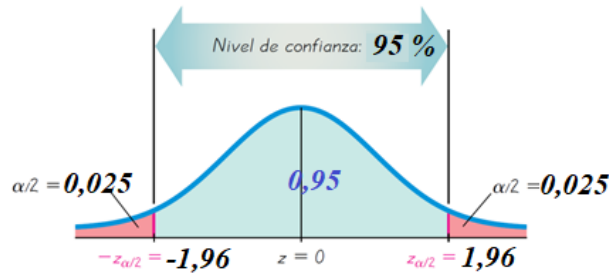
B 4 (hasta 2 puntos)

Un estudio, sobre el número de fumadores de una zona a partir de una muestra de tamaño 361, señala que la proporción muestral de fumadores es del 35%. Con estos datos se pide calcular:

- a) ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95%?
 b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza al 99% sea de 0'12?

a) La proporción muestral vale $p = 0.35$. El tamaño de la muestra es $n = 361$.

Buscamos para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



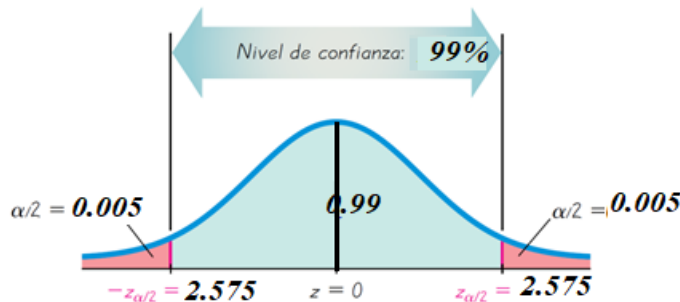
$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizando la fórmula del error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{361}} \approx 0.0492$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.35 - 0.0492, 0.35 + 0.0492) = (0.3008, 0.3992)$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

Si la amplitud del intervalo de confianza al 99% es de 0.12 entonces el error es la mitad de esta amplitud, es decir, el error vale 0.06. Utilizando la fórmula del error:

$$Error = 0.06 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.06 \Rightarrow 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} = 0.06 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.06}{2.575} = \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.06}{2.575} \right)^2 = \frac{0.35 \cdot 0.65}{n} \Rightarrow n = \frac{0.35 \cdot 0.65}{\left(\frac{0.06}{2.575} \right)^2} \approx 419.02$$

La muestra debe ser de un mínimo de 420 personas.