



UNIBERTSITATERA SARTZEKO  
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO  
A LA UNIVERSIDAD

2019ko EKAINA

JUNIO 2019

GIZARTE ZIENTZIEI  
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A  
LAS CIENCIAS SOCIALES II

## OPCIÓN A

### A 1 (hasta 3 puntos)

Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

|   | Masa   | Chocolate |
|---|--------|-----------|
| A | 1 kg   | 1,5 kg    |
| B | 1,5 kg | 1 kg      |

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

### A 2 (hasta 3 puntos)

Se considera la curva  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ .

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.
- Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.
- Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

### A 3 (hasta 2 puntos)

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que,  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ , y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es  $\frac{3}{4}$ . Calcular:

- La probabilidad de que ocurra el suceso  $A$ , condicionada a que se ha producido el suceso  $B$ .
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
- La probabilidad de que ocurra el suceso  $A$  y no ocurra el suceso  $B$ .
- La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

### A 4 (hasta 2 puntos)

En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

- Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.
- Interpretar los resultados obtenidos.



UNIBERTSITATERA SARTZEKO  
EBALUAZIOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO  
A LA UNIVERSIDAD

2019ko EKAINA

JUNIO 2019

GIZARTE ZIENTZIEI  
APLIKATUTAKOMATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A  
LAS CIENCIAS SOCIALES II

## OPCIÓN B

### B 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

- Determina la matriz inversa de la matriz  $I + B$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 2.
- Calcular las matrices  $X$  e  $Y$  que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

### B 2 (hasta 3 puntos)

- Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto  $(0, 0)$ , y tiene un máximo en el punto  $(1, 1)$ .
- Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas  $OX$ .

### B 3 (hasta 2 puntos)

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

### B 4 (hasta 2 puntos)

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media  $\mu$  y desviación típica 75 euros.

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

- Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.
- ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

## Soluciones

### A 1 (hasta 3 puntos)

Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

|   | Masa   | Chocolate |
|---|--------|-----------|
| A | 1 kg   | 1,5 kg    |
| B | 1,5 kg | 1 kg      |

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Llamamos “x” al número de tartas A e “y” al número de tartas B que se fabrican.

|                 | Kg de masa | Kg de chocolate | Ingresos    |
|-----------------|------------|-----------------|-------------|
| Nº tartas A (x) | x          | 1,5x            | 24x         |
| Nº tartas B (y) | 1,5y       | y               | 30y         |
| TOTALES         | $x + 1.5y$ | $1.5x + y$      | $24x + 30y$ |

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones.

“La pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente”  $\rightarrow x + 1.5y \leq 300; 1.5x + y \leq 300$

Las cantidades deben ser positivas y enteras  $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y \leq 300 \\ 1.5x + y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo son los ingresos que deseamos maximizar:  $I(x, y) = 24x + 30y$

Primero dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 1.5y = 300$$

$$x \quad \left| \quad y = \frac{300 - x}{1.5} \right.$$

$$0 \quad \left| \quad 200 \right.$$

$$120 \quad \left| \quad 120 \right.$$

$$300 \quad \left| \quad 0 \right.$$

$$1.5x + y = 300$$

$$x \quad \left| \quad y = 300 - 1.5x \right.$$

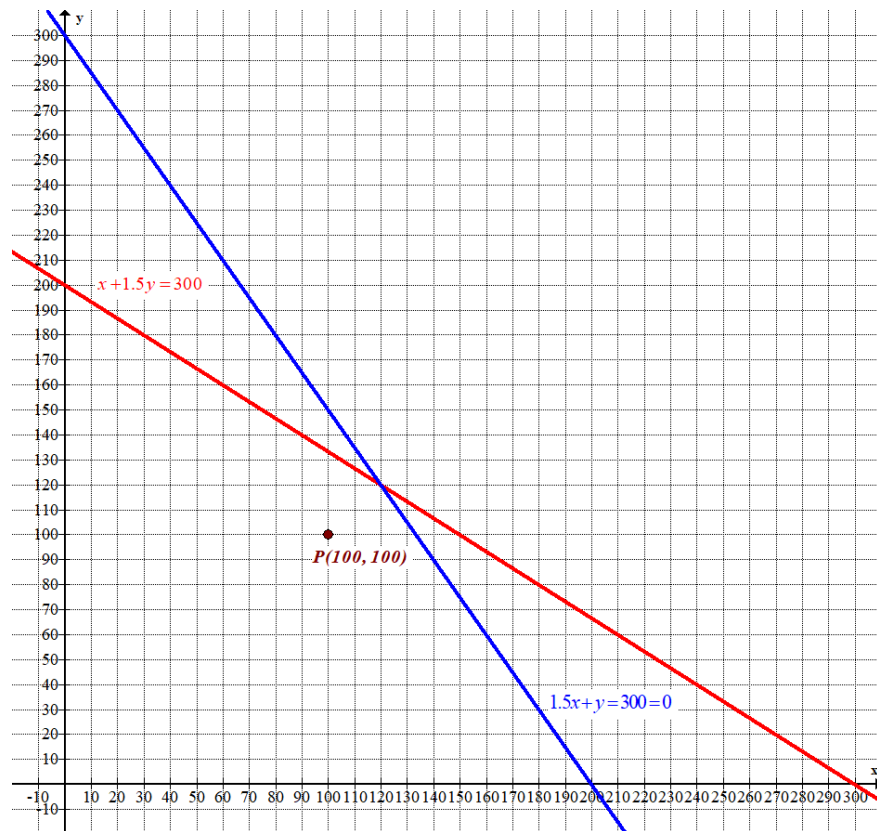
$$0 \quad \left| \quad 300 \right.$$

$$120 \quad \left| \quad 120 \right.$$

$$200 \quad \left| \quad 0 \right.$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

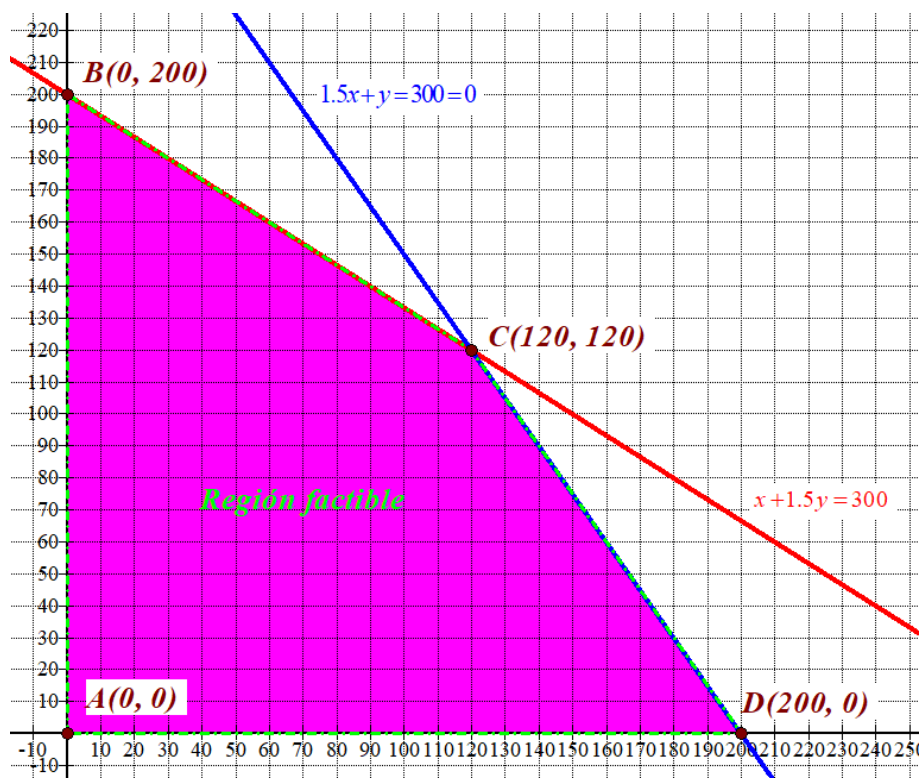
Primer  
cuadrante



Comprobamos si el punto  $P(100, 100)$  cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 1.5 \cdot 100 \leq 300 \\ 1.5 \cdot 100 + 100 \leq 300 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona coloreada del siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo  $I(x, y) = 24x + 30y$  en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 200) \rightarrow I(0, 200) = 24 \cdot 0 + 30 \cdot 200 = 6000$$

$$C(120, 120) \rightarrow I(120, 120) = 24 \cdot 120 + 30 \cdot 120 = 6480 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(200, 0) \rightarrow I(200, 0) = 24 \cdot 200 + 30 \cdot 0 = 4800$$

Los ingresos máximos que se pueden conseguir son de 6480 euros con la fabricación de 120 tartas de cada tipo.

**A 2 (hasta 3 puntos)**

Se considera la curva  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ .

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.
- Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.
- Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

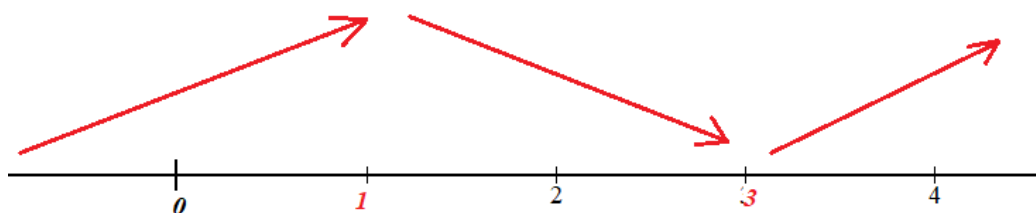
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo  $(-\infty, 1)$  consideramos  $x = 0$  y la derivada vale  $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$ . La función crece en  $(-\infty, 1)$ .
- En el intervalo  $(1, 3)$  consideramos  $x = 2$  y la derivada vale  $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$ . La función decrece en  $(1, 3)$ .
- En el intervalo  $(3, +\infty)$  consideramos  $x = 4$  y la derivada vale  $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$ . La función crece en  $(3, +\infty)$ .

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  y decrece en  $(1, 3)$ .

- b) Observando el esquema obtenido en el apartado anterior podemos decir que la función tiene un máximo relativo en  $x=1$  y un mínimo relativo en  $x=3$ . Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow f''(x) = 6x - 12 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Como la derivada tercera no se anula para  $x=2$  la función tiene un punto de inflexión en  $x=2$ .

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$$

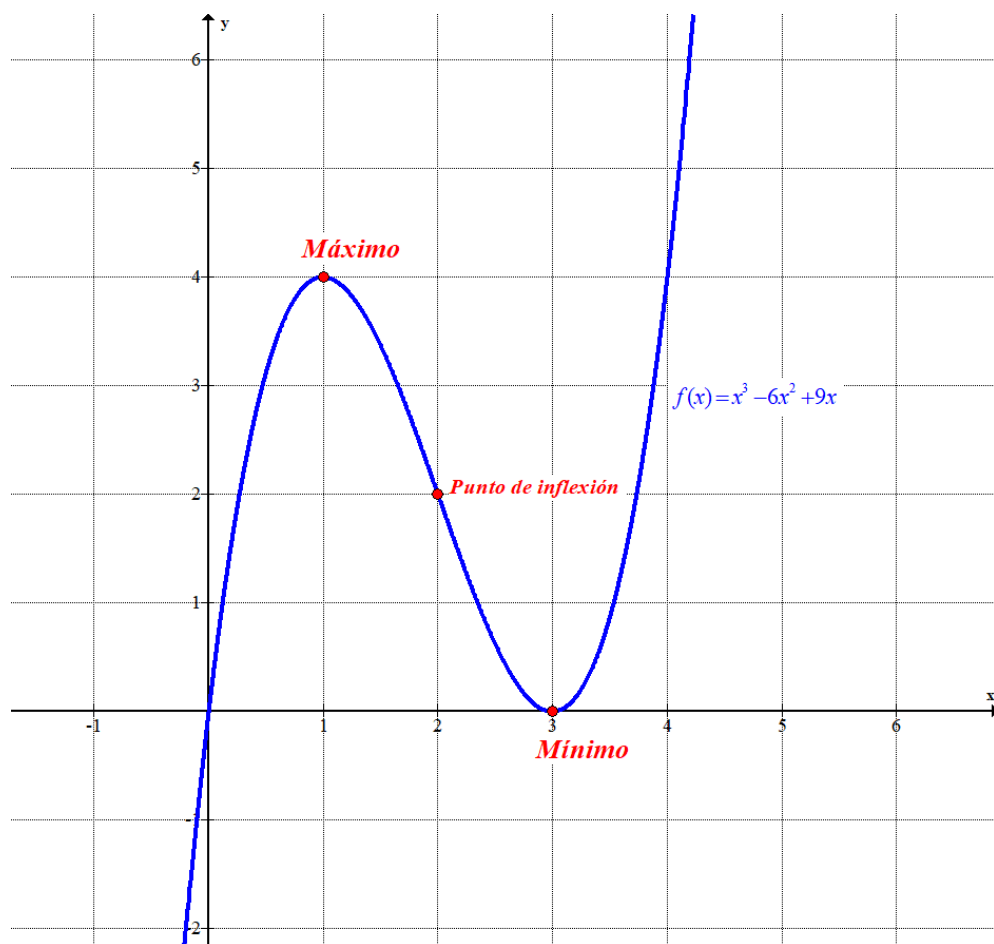
Como  $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ ,  $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2$  y  $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$  la función tiene un máximo relativo en  $(1, 4)$ , un mínimo relativo en  $(3, 0)$  y un punto de inflexión en  $(2, 2)$ .

c) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3 = x \end{cases}$$

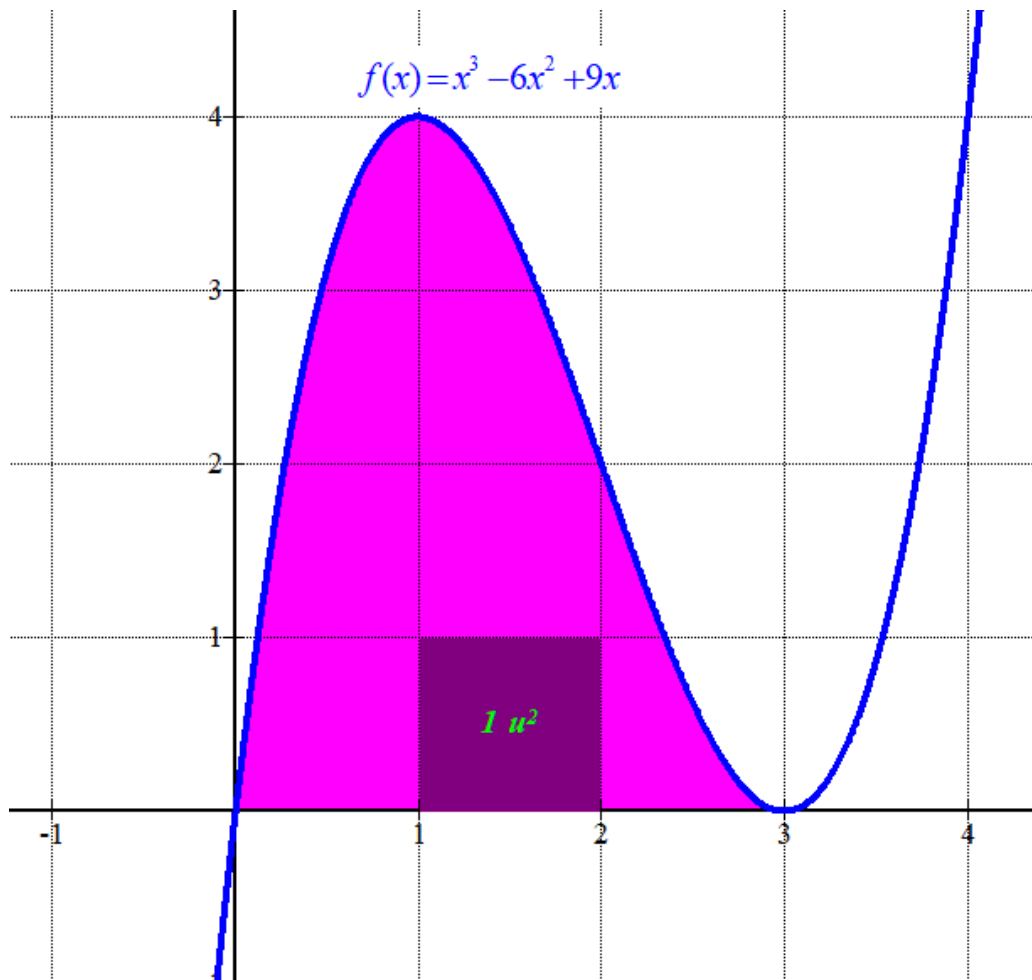
La gráfica de la función corta el eje de abscisas en dos puntos:  $A(0, 0)$  y  $B(3, 0)$ . Dibujamos la gráfica de la función.



c) El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas es el valor de la integral definida entre 0 y 3 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 x^3 - 6x^2 + 9x dx = \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \left[ \frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2} \right] - \left[ \frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + \frac{9 \cdot 0^2}{2} \right] = \frac{27}{4} u^2 \end{aligned}$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas tiene un valor de 6.75 unidades cuadradas.



**A 3 (hasta 2 puntos)**

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que,  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ , y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es  $\frac{3}{4}$ . Calcular:

- La probabilidad de que ocurra el suceso  $A$ , condicionada a que se ha producido el suceso  $B$ .
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
- La probabilidad de que ocurra el suceso  $A$  y no ocurra el suceso  $B$ .
- La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

Sabemos que  $P(A) = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$  y  $P(A \cup B) = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ .

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

Ponemos estos datos en una tabla de contingencia.

|                | B | B <sup>c</sup> |    |
|----------------|---|----------------|----|
| A              | 1 |                | 6  |
| A <sup>c</sup> |   |                |    |
|                | 4 |                | 12 |

Completamos la tabla.

|                | B | B <sup>c</sup> |    |
|----------------|---|----------------|----|
| A              | 1 | 5              | 6  |
| A <sup>c</sup> | 3 | 3              | 6  |
|                | 4 | 8              | 12 |

A partir de los datos de la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

- Miramos los datos de la columna B y tenemos que  $P(A/B) = \frac{1}{4} = 0.25$ .
- $P(A^c \cap B^c) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$ .
- $P(A \cap B^c) = \frac{5}{12} \approx 0.4167$ .
- $P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \frac{5+3}{12} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$

**OTRA FORMA DE RESOLVERLO**

Sabemos que  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  y utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos obtenemos  $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ .

a) Nos piden calcular  $P(A/B)$ .

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{12} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) Nos piden calcular  $P(A^c \cap B^c)$ .

$$P(A^c \cap B^c) = \{Ley de Morgan\} = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

c) Nos piden calcular  $P(A \cap B^c)$

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{2} = P(A \cap B^c) + \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B^c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

d) La probabilidad de “ocurre solo uno de los dos sucesos” es la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos menos la probabilidad de que ocurran los dos sucesos.

$$P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.6667}$$

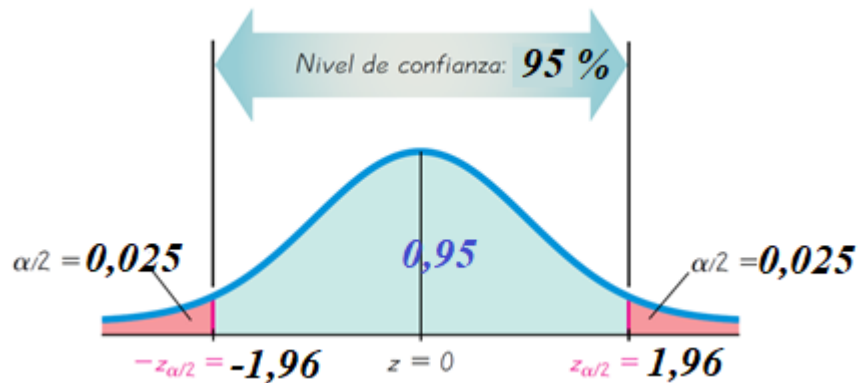
**A 4 (hasta 2 puntos)**

En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

- Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.
- Interpretar los resultados obtenidos.

a) La proporción muestral vale  $p = \frac{350}{500} = 0.7$ . El tamaño de la muestra =  $n = 500$ .

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de  $z_{\alpha/2}$ .



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}} \approx 0.04$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.7 - 0.04, 0.7 + 0.04) = (0.66, 0.74)$$

El error máximo para un nivel de confianza del 95% es de 0.04, es decir, del 4%.

- El porcentaje de personas de la población que son aficionados al deporte está entre el 66% y el 74% con un nivel de confianza del 95 %.

**B 1** (hasta 3 puntos)

Sean las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

- a) Determina la matriz inversa de la matriz  $I + B$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 2.  
 b) Calcular las matrices  $X$  e  $Y$  que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

a) Hallamos la expresión de la matriz  $I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Para que esta matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|I + B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

Hallamos su inversa.

$$(I + B)^{-1} = \frac{\text{Adj}(I + B)}{|I + B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- b) Resolvemos el sistema matricial planteado.

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \Rightarrow Y + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow Y = (I + B)^{-1}C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30+0 & 33+0 \\ -10+8 & -11+14 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & 33 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = Y \Rightarrow X = A^{-1}Y \Rightarrow \dots$$

Calculamos la inversa de la matriz  $A$ .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de resolver el sistema.

$$\dots \Rightarrow X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución son  $X = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$  e  $Y = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

**B 2 (hasta 3 puntos)**

- a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0), y tiene un máximo en el punto (1, 1).  
 b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas OX.

a) La función polinómica de segundo grado es  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Como la función pasa por el punto (0, 0) entonces  $f(0) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda  $f(x) = ax^2 + bx$ .

Si la función tiene un máximo en el punto (1, 1) implica dos cosas: la derivada se anula en  $x=1$ , es decir,  $f'(1) = 0$  y también que  $f(1) = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 0 \\ f'(x) = 2ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a \cdot 1 + b \Rightarrow \boxed{0 = 2a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(x) = ax^2 + bx \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \Rightarrow \boxed{1 = a + b}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 2a + b \\ 1 = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a = b \\ 1 = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a - 2a \Rightarrow 1 = -a \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = -2(-1) = 2}$$

La función que buscamos es  $f(x) = -x^2 + 2x$ .

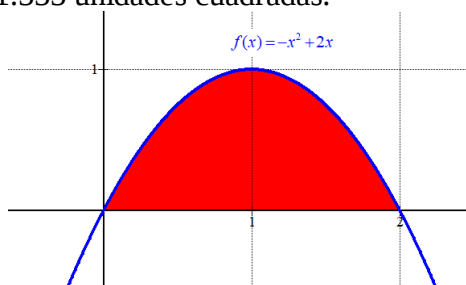
b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 2x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ -x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\int_0^2 -x^2 + 2x dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left[ -\frac{2^3}{3} + 2^2 \right] - \left[ -\frac{0^3}{3} + 0^2 \right] = \frac{4}{3} \approx 1.333$$

El área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas tiene un valor aproximado de 1.333 unidades cuadradas.



**B 3 (hasta 2 puntos)**

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

De la urna B solo podemos sacar bola negra (no tiene bolas blancas).

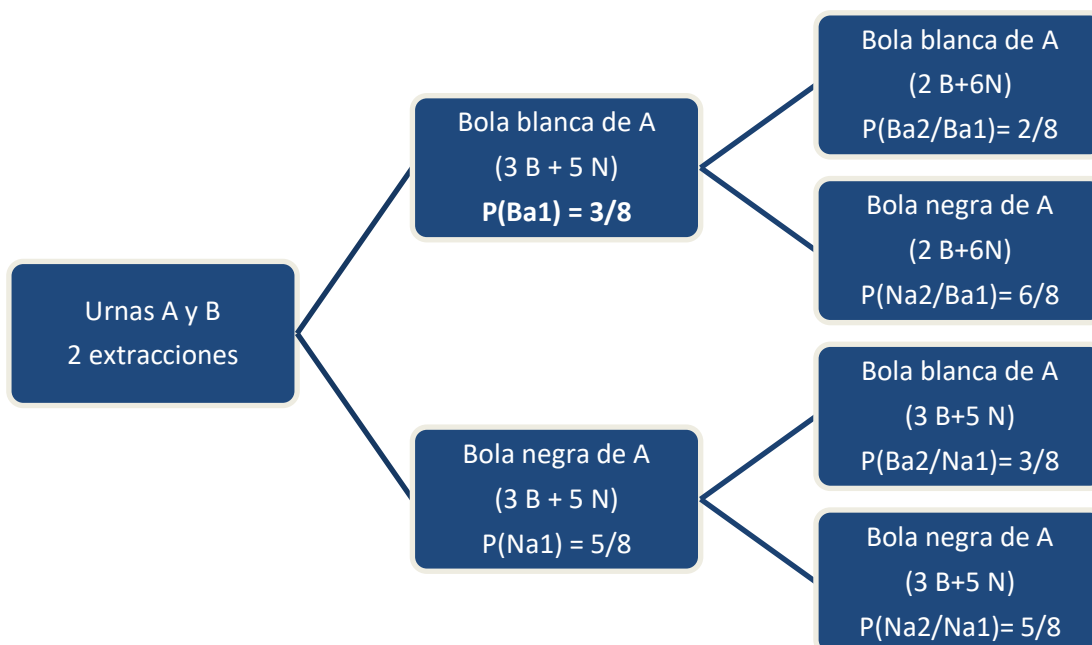
En la primera extracción lo único que puede variar es la bola que sacamos de A (blanca o negra).

Si sacamos bola blanca de A se pasará a la urna B y en la urna A se introduce una bola negra, entonces la urna A contiene 2 bolas blancas y 6 negras.

Si sacamos bola negra de A no cambiará la composición de la urna A (cambiamos bola negra por bola negra).

Llamamos Ba1 al suceso “sacar bola blanca de A en la extracción 1”, Na1 a “sacar bola negra de A en la extracción 1”. De forma análoga llamamos Ba2 al suceso “sacar bola blanca de A en la extracción 2”, Na2 a “sacar bola negra de A en la extracción 2”.

Realizamos un diagrama de árbol del experimento.



Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(Na2) = P(Ba1)P(Na2/Ba1) + P(Na1)P(Na2/Na1) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{43}{64} = 0.671875$$

**B 4 (hasta 2 puntos)**

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media  $\mu$  y desviación típica 75 euros.

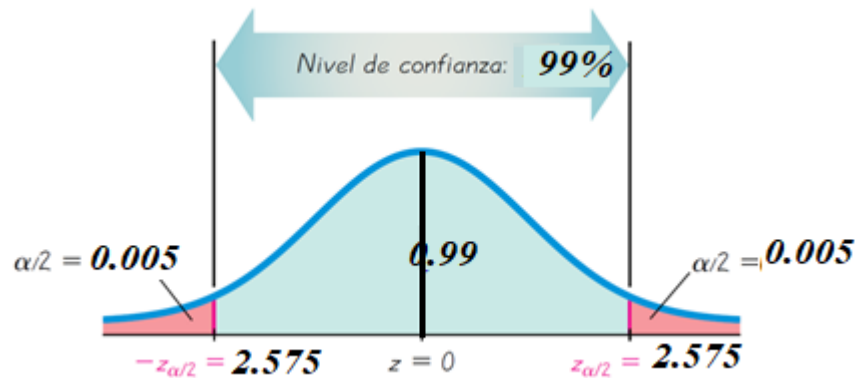
Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

- Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.
- ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

$X$  = el gasto anual en transporte público realizado por las familias.  $X = N(\mu, 75)$

Tamaño de muestra =  $n = 100$ . Media muestral  $\bar{x} = 250$ .

- Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de  $z_{\alpha/2}$ .



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{75}{\sqrt{100}} = 19.3125 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(250 - 19.3125, 250 + 19.3125) = (230.6875, 269.3125)$$

El gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 % estará entre 230.6875 y 269.3125 euros.

- Para un nivel de confianza del 99% hemos visto que  $z_{\alpha/2} = 2.575$ .

Utilizamos la fórmula del error. Obtenemos el valor de “n” para un error de 10 euros.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 2,575 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 2,575 \cdot \frac{75}{10} \Rightarrow n = \left( 2,575 \cdot \frac{75}{10} \right)^2 \approx 372.97$$

La muestra debe ser de un mínimo de 373 familias.