



Universidad
Zaragoza

PRUEBAS DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
CONVOCATORIA DE FEBRERO DE 2025
EJERCICIO DE: MATEMÁTICAS
TIEMPO DISPONIBLE: 1 hora 30 minutos

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A1. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = e^x(x^2 - 2x - 2)$

- a) (1 punto) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) (0,5 puntos) Hallar los puntos de inflexión si existen.
- c) (1 punto) Obtener $\int (f(x) - x^2 e^x) dx$

A2. (2,5 puntos) Para $f(x) = \frac{1-2x}{x-x^2}$

- a) (1 punto) Obtener el dominio de definición de $f(x)$ y de $f'(x)$.
- b) (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes y sus asíntotas.
- c) (0,5 puntos) Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x)$.

A3. (2,5 puntos) A partir del mes de febrero, los jubilados (≥ 65) pueden entrar al cine por 2€, los menores de edad por 3€ y los adultos por 6€. Sabemos que el pasado martes la recaudación de uno de los cines fue de 147€. En cuanto al aforo, se sabe que hubo el triple de jubilados que de menores, y que el número de jubilados más el de adultos fue 47.

- a) (1 punto) Plantea el sistema que nos permita calcular el número de menores, adultos y jubilados que fueron al cine el pasado martes.
- b) (1 punto) Resolver el sistema planteado.
- c) (0,5 puntos) ¿Para qué valor de $m \in \mathbb{R}$ es el determinante de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ igual al determinante de la matriz del sistema que has planteado en el apartado a)?

A4. (2,5 puntos) En un juego de mesa de cartas, el naipe con el valor 0 tiene reverso negro, los naipes con valores pares (2,4,6 y 8) tienen reverso amarillo y los naipes con valores impares (1,3,5,7 y 9) reverso rojo. Una inteligencia artificial (IA) mal entrenada crea cartas mezclando todos los valores con todos los colores posibles, y saca un naipe al azar.

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la carta seleccionada por la IA sea válida para el juego.
- b) (1 punto) Si la carta extraída es de reverso amarillo, ¿qué probabilidad hay de que sea válida?
- c) (0,5 puntos) Si la carta mostrada resulta ser válida para el juego, ¿de qué color es más probable que sea su reverso?

OPCIÓN B

B1. (2,5 puntos) Sean las funciones $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = \ln(e^x)$, $h(x) = f(x) - g(x)$.

Calcular

a) (0,25 puntos) Dominio de definición de la función $\frac{h(x)}{x}$.

b) (1 punto) $f''(5\pi)$, $g'(0)$, $h'(\pi/6)$.

c) (1,25 puntos) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (f(x))^{\frac{2}{f'(x)}}$

B2. (2,5 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

a) (0,75 puntos) Obtener los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x)$ es una función continua.

b) (1 punto) Determinar las asíntotas de esta función.

c) (0,75 puntos) Hallar $\int_0^1 \frac{f(x)-1}{x^3} dx$.

B3. (2,5 puntos) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) (0,5 puntos) Estudiar el rango de A dependiendo de los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $m=2$ obtener las raíces de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) (1 punto) Para $m=1$ calcular la inversa de A .

B4. (2,5 puntos) En una tienda de ropa deportiva de un pueblo de montaña, se quiere analizar la relación que hay entre la ocupación turística en miles de personas (T) y las ventas en miles de euros al mes (V). Se han recogido durante los 8 primeros meses del año los siguientes datos:

MES	T	V
Enero	8.5	8.5
Febrero	8.8	7
Marzo	4.6	3
Abril	1.5	2.5
Mayo	2.2	2
Junio	4.8	4
Julio	4.9	4.5
Agosto	6.4	5.5

a) (1 punto) Obtener la recta de regresión de las ventas mensuales en función de la ocupación turística promedio de cada mes.

b) (1 punto) Calcular el coeficiente de correlación lineal e interpretar el resultado.

c) (0,5 puntos) A partir de la recta de regresión, ¿cuántos miles de euros se venderán en el mes de septiembre si se espera una ocupación turística en dicho mes de 2.000 visitantes?

SOLUCIONES**A1.** (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = e^x(x^2 - 2x - 2)$ **a)** (1 punto) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.**b)** (0,5 puntos) Hallar los puntos de inflexión si existen.**c)** (1 punto) Obtener $\int (f(x) - x^2 e^x) dx$

a) Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x - 2) \Rightarrow f'(x) = e^x(x^2 - 2x - 2) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ consideramos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = e^{-3}((-3)^2 - 4) = \frac{5}{e^3} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 2)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = e^0(0^2 - 4) = -4 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ consideramos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = e^3(3^2 - 4) = 5e^3 > 0. \text{ La función crece en } (2, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2, 2)$.

b) Averiguamos cuando se anula la segunda derivada (candidatos a puntos de inflexión).

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4) \Rightarrow f''(x) = e^x(x^2 - 4) + e^x(2x) = e^x(x^2 + 2x - 4)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow$$

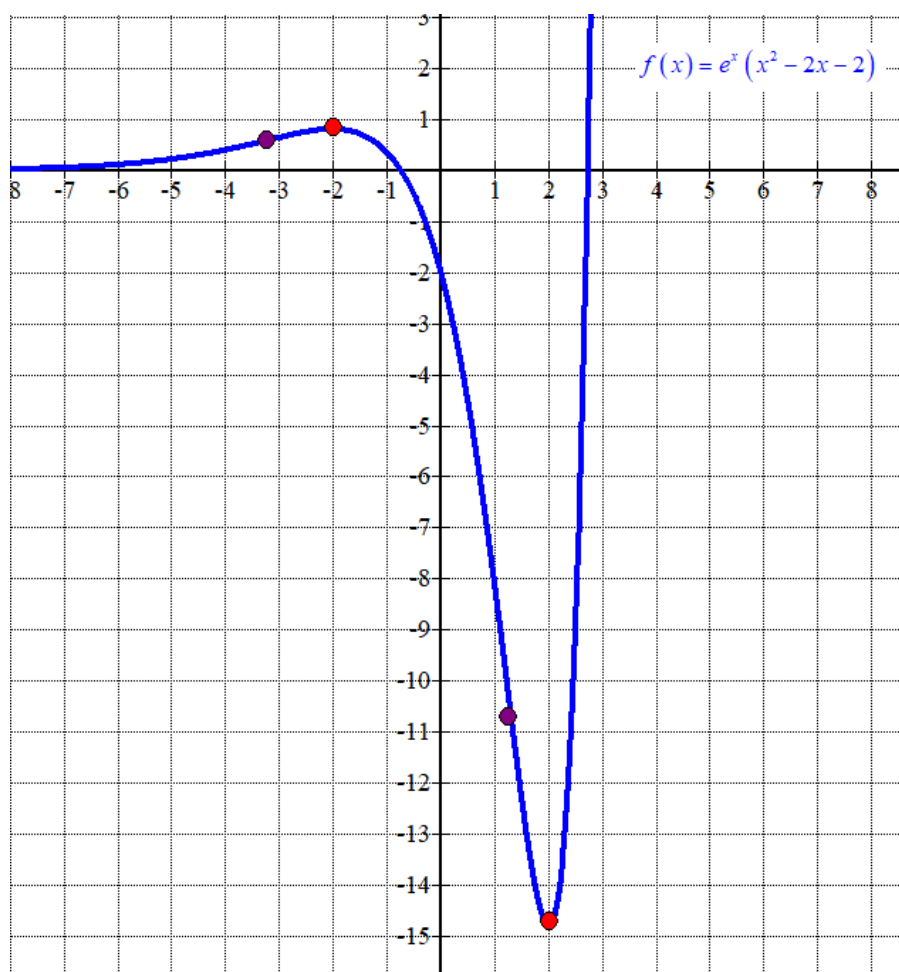
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}}$$

Sustituimos estos valores en la derivada tercera y vemos si su valor es nulo o no.

$$f''(x) = e^x(x^2 + 2x - 4) \Rightarrow f'''(x) = e^x(x^2 + 2x - 4) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x - 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'''(-1 + \sqrt{5}) = e^{-1 + \sqrt{5}} \left((-1 + \sqrt{5})^2 + 4(-1 + \sqrt{5}) - 2 \right) = 2\sqrt{5}e^{-1 + \sqrt{5}} \neq 0 \\ f'''(-1 - \sqrt{5}) = e^{-1 - \sqrt{5}} \left((-1 - \sqrt{5})^2 + 4(-1 - \sqrt{5}) - 2 \right) = -2\sqrt{5}e^{-1 - \sqrt{5}} \neq 0 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos de inflexión: $x = -1 - \sqrt{5}$ y $x = -1 + \sqrt{5}$.



c) Obtenemos la expresión del integrando.

$$f(x) - x^2 e^x = e^x(x^2 - 2x - 2) - x^2 e^x = e^x(-2x - 2) = -2e^x(x + 1)$$

Calculamos la integral pedida.

$$\int (f(x) - x^2 e^x) dx = \int -2e^x(x + 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x + 1 = u \rightarrow dx = du \\ -2e^x = dv \rightarrow v = \int -2e^x dx = -2e^x \end{array} \right\} =$$

$$= (x + 1)(-2e^x) - \int (-2e^x) dx = e^x(-2x - 2) + 2e^x = \boxed{-2xe^x + K}$$

A2. (2,5 puntos) Para $f(x) = \frac{1-2x}{x-x^2}$

- a) (1 punto) Obtener el dominio de definición de $f(x)$ y de $f'(x)$.
 b) (1 punto) Calcular sus puntos de corte con los ejes y sus asíntotas.
 c) (0,5 puntos) Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} xf'(x)$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

El dominio de definición de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

Calculamos la derivada de la función.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1-2x}{x-x^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{-2(x-x^2) - (1-2x)(1-2x)}{(x-x^2)^2} = \\ &= \frac{-2x + 2x^2 - (1-2x-2x+4x^2)}{(x-x^2)^2} = \frac{-2x + 2x^2 - 1 + 4x - 4x^2}{(x-x^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x-x^2)^2} \end{aligned}$$

El dominio de definición de la función derivada es $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

b) Puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1-2x}{x-x^2} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1-2x}{x-x^2} = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1-2x}{x-x^2} \\ \text{Eje } OY \rightarrow x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{1-2 \cdot 0}{0-0^2} = \text{No existe}$$

El único punto de corte con los ejes es $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{x-x^2} = \frac{1-0}{0-0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-2x}{x-x^2} = \frac{1-2}{1-1^2} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{-x} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

c) Calculamos el primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x - x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{(-x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{\infty} = \boxed{0}$$

Calculamos el segundo límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x - x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-2x^2 + 2x - 1)}{(x(1-x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-2x^2 + 2x - 1)}{x^2(1-x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x(1-x)^2} = \frac{-2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{0(1-0)^2} = \frac{-1}{0} = \boxed{\infty} \end{aligned}$$

A3. (2,5 puntos) A partir del mes de febrero, los jubilados (≥ 65) pueden entrar al cine por 2€, los menores de edad por 3€ y los adultos por 6€. Sabemos que el pasado martes la recaudación de uno de los cines fue de 147€. En cuanto al aforo, se sabe que hubo el triple de jubilados que de menores, y que el número de jubilados más el de adultos fue 47.

a) (1 punto) Plantea el sistema que nos permita calcular el número de menores, adultos y jubilados que fueron al cine el pasado martes.

b) (1 punto) Resolver el sistema planteado.

c) (0,5 puntos) ¿Para qué valor de $m \in \mathbb{R}$ es el determinante de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ igual al determinante de la matriz del sistema que has planteado en el apartado a)?

a) Llamamos “x” al número de jubilados que van al cine, “y” al número de menores y “z” al número de adultos.

El pasado martes la recaudación de uno de los cines fue de 147€ $\rightarrow 2x + 3y + 6z = 147$.

Hubo el triple de jubilados que de menores $\rightarrow x = 3y$

El número de jubilados más el de adultos fue 47 $\rightarrow x + z = 47$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 6z = 147 \\ x = 3y \\ x + z = 47 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 6z = 147 \\ x - 3y = 0 \\ x + z = 47 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 6z = 147 \\ x = 3y \\ x + z = 47 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6y + 3y + 6z = 147 \\ 3y + z = 47 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9y + 6z = 147 \\ 3y + z = 47 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 2z = 49 \\ z = 47 - 3y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y + 2(47 - 3y) = 49 \Rightarrow 3y + 94 - 6y = 49 \Rightarrow -3y = -45 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-45}{-3} = 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 3 \cdot 15 = 45} \\ \boxed{z = 47 - 3 \cdot 15 = 2} \end{array} \right.$$

Acudieron al cine 45 jubilados, 15 jóvenes y 2 adultos.

c) La matriz del sistema planteado en el apartado a) es $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 0 + 18 - 3 - 0 = 9. \text{ Averiguamos cuando el determinante de A vale 9.}$$

$$|A| = 9 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow -m - 4 = 9 \Rightarrow \boxed{-13 = m}$$

El valor buscado es $m = -13$.

A4. (2,5 puntos) En un juego de mesa de cartas, el naipes con el valor 0 tiene reverso negro, los naipes con valores pares (2,4,6 y 8) tienen reverso amarillo y los naipes con valores impares (1,3,5,7 y 9) reverso rojo. Una inteligencia artificial (IA) mal entrenada crea cartas mezclando todos los valores con todos los colores posibles, y saca un naipes al azar.

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la carta seleccionada por la IA sea válida para el juego.
b) (1 punto) Si la carta extraída es de reverso amarillo, ¿qué probabilidad hay de que sea válida?
c) (0,5 puntos) Si la carta mostrada resulta ser válida para el juego, ¿de qué color es más probable que sea su reverso?

a) Se crearían 30 naipes: 10 números (del 0 al 9) por 3 colores (negro, amarillo y rojo) = 30.
De estos 30 naipes hay solo 10 que son válidos, por lo que aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que la carta seleccionada por la IA sea válida para el juego tiene un valor de $\frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$.

b) Hay 10 cartas con el reverso amarillo (del 0 al 9) y sólo son válidas 4, las que tienen uno de los números pares 2, 4, 6 y 8, por lo que la probabilidad de que sea válida la carta elegida con reverso amarillo tiene un valor de $\frac{4}{10} = 0.4$.

c) Calculamos la probabilidad de que al elegir una carta válida (10) esta tenga el reverso negro
(1): $\frac{1}{10} = 0.1$.

Calculamos la probabilidad de que al elegir una carta válida (10) esta tenga el reverso amarillo (4): $\frac{4}{10} = 0.4$.

Calculamos la probabilidad de que al elegir una carta válida (10) esta tenga el reverso rojo
(5): $\frac{5}{10} = 0.5$.

Es más probable que tenga el reverso rojo pues tiene una probabilidad de 0.5 mayor que la probabilidad de que tenga reverso negro (0.1) o amarillo (0.4).

B1. (2,5 puntos) Sean las funciones $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = \ln(e^x)$, $h(x) = f(x) - g(x)$.

Calcular

a) (0,25 puntos) Dominio de definición de la función $\frac{h(x)}{x}$.

b) (1 punto) $f''(5\pi)$, $g'(0)$, $h'(\pi/6)$.

c) (1,25 puntos) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (f(x))^{\frac{2}{f'(x)}}$

a) Obtenemos la expresión de la función $\frac{h(x)}{x}$.

$$h(x) = f(x) - g(x) = \sin(2x) - \ln(e^x) = \sin(2x) - x \Rightarrow \frac{h(x)}{x} = \frac{\sin(2x) - x}{x}$$

El dominio de la función $\frac{h(x)}{x} = \frac{\sin(2x) - x}{x}$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador: $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Calculamos lo pedido.

$$f(x) = \sin(2x) \Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x) \Rightarrow f''(x) = -4\sin(2x) \Rightarrow f''(5\pi) = -4\sin(10\pi) = 0$$

$$g(x) = \ln(e^x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \Rightarrow g'(0) = 1$$

$$h(x) = \sin(2x) - x \Rightarrow h'(x) = 2\cos(2x) - 1 \Rightarrow h'(\pi/6) = 2\cos(\pi/3) - 1 = 0$$

c) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (f(x))^{\frac{2}{f'(x)}} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin(2x))^{\frac{2}{2\cos(2x)}} = (\sin(\pi/2))^{\frac{2}{2\cos(\pi/2)}} = 1^{\frac{2}{0}} =$$

$$= 1^\infty = \text{Indeterminación} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2}{2\cos(2x)} \cdot (1 - \sin(2x))} = \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2}{2\cos(2x)} \cdot (1 - \sin(2x)) &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 - 2\sin(2x)}{2\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)} = \\ &= \frac{1 - \sin(\pi/2)}{\cos(\pi/2)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-2\cos(2x)}{-2\sin(2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\dots = e^0 = 1$$

B2. (2,5 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

a) (0,75 puntos) Obtener los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x)$ es una función continua.

b) (1 punto) Determinar las asíntotas de esta función.

c) (0,75 puntos) Hallar $\int_0^1 \frac{f(x)-1}{x^3} dx$.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{0^3}{(0-2)^2} + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^x = ae^0 = a \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El valor buscado es $a = 1$.

Con este valor la función no es continua en su dominio pues en $x = 2$ no está definida la función al anularse el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \frac{2^3}{(2-2)^2} + 1 = \frac{8}{0} + 1 = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función cuando x tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $-\infty$ no tiene asíntota oblicua, pues tiene asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $+\infty$.

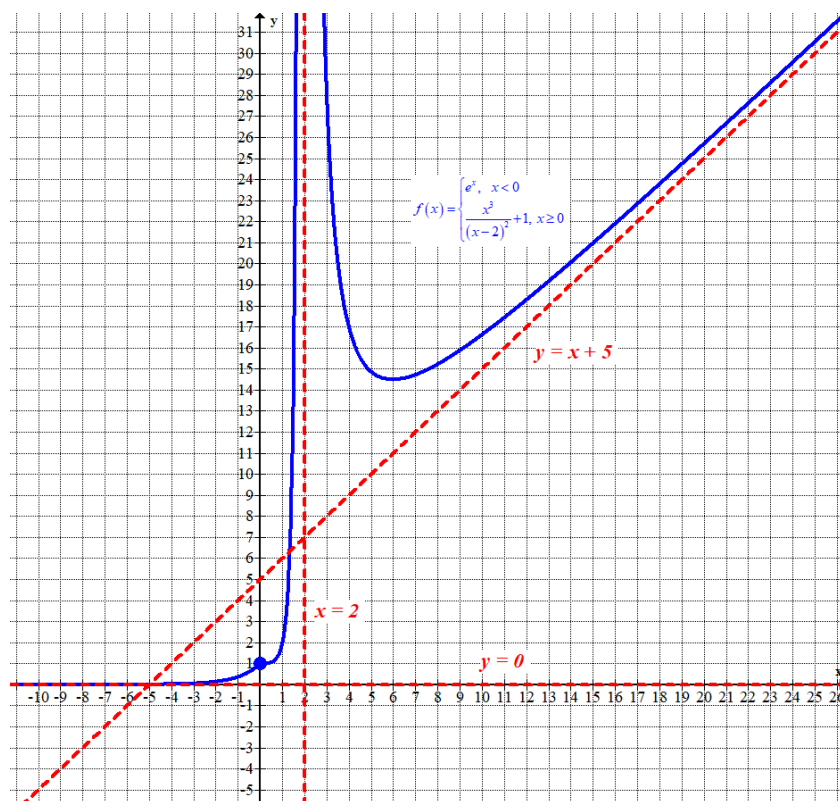
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-2)^2} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-2)^2}}{x} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x-2)^2} + \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 4 - 4x} + 1 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 4 - 4x - x^3 - 4x + 4x^2}{x^2 + 4 - 4x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 8x + 4}{x^2 + 4 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiene a la recta $y = x + 5$ como asíntota oblicua.



c) La función en el intervalo $(0,1)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1$.

$$\frac{f(x)-1}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 - 1}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{(x-2)^2}}{x^3} = \frac{x^3}{x^3(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)-1}{x^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int_0^1 (x-2)^{-2} dx = \left[\frac{(x-2)^{-1}}{-1} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{-1}{x-2} \right]_0^1 = \frac{-1}{1-2} - \frac{-1}{0-2} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

B3. (2,5 puntos) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) (0,5 puntos) Estudiar el rango de A dependiendo de los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $m = 2$ obtener las raíces de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) (1 punto) Para $m = 1$ calcular la inversa de A .

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 3m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila 2ª y la columna 2ª (nulas) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$. El rango de A es 2

b) Para $m = 2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Resolvemos la ecuación pedida.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \\ 2-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2 \\ 3-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3 \end{cases}$$

Las raíces de la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ son $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y $\lambda = 3$.

c) Para $m = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

B4. (2,5 puntos) En una tienda de ropa deportiva de un pueblo de montaña, se quiere analizar la relación que hay entre la ocupación turística en miles de personas (T) y las ventas en miles de euros al mes (V). Se han recogido durante los 8 primeros meses del año los siguientes datos:

MES	T	V
Enero	8.5	8.5
Febrero	8.8	7
Marzo	4.6	3
Abril	1.5	2.5
Mayo	2.2	2
Junio	4.8	4
Julio	4.9	4.5
Agosto	6.4	5.5

- a) (1 punto) Obtener la recta de regresión de las ventas mensuales en función de la ocupación turística promedio de cada mes.
 b) (1 punto) Calcular el coeficiente de correlación lineal e interpretar el resultado.
 c) (0,5 puntos) A partir de la recta de regresión, ¿cuántos miles de euros se venderán en el mes de septiembre si se espera una ocupación turística en dicho mes de 2.000 visitantes?

Realizamos una tabla para obtener las medias, las desviaciones típicas y la covarianza.

MES	T	V	T · V	T ²	V ²
Enero	8.5	8.5	72.25	72.25	72.25
Febrero	8.8	7	61.6	77.44	49
Marzo	4.6	3	13.8	21.16	9
Abril	1.5	2.5	3.75	2.25	6.25
Mayo	2.2	2	4.4	4.84	4
Junio	4.8	4	19.2	23.04	16
Julio	4.9	4.5	22.05	24.01	20.25
Agosto	6.4	5.5	35.2	40.96	30.25
TOTALES	41.7	37	232.25	265.95	207

Hallamos la media de ambas distribuciones.

$$\bar{T} = \frac{41.7}{8} = 5.2125 \quad \bar{V} = \frac{37}{8} = 4.625$$

Hallamos las desviaciones típicas de ambas distribuciones.

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{265.95}{8} - 5.2125^2 \approx 6.0736 \Rightarrow \sigma_T = \sqrt{6.0736} = 2.4645$$

$$\sigma_V^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2 = \frac{207}{8} - 4.625^2 = 4.4844 \Rightarrow \sigma_V = \sqrt{4.4844} = 2.1176$$

Hallamos la covarianza.

$$\sigma_{TV} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{T} \cdot \bar{V} = \frac{232.25}{8} - 5.2125 \cdot 4.625 = 4.9234$$

- a) La recta de regresión de V sobre T tiene ecuación $V - \bar{V} = \frac{\sigma_{TV}}{\sigma_T^2} (T - \bar{T})$.

$$V - 4.625 = \frac{4.9234}{6.0736} (T - 5.2125) \Rightarrow V - 4.625 = 0.8106T - 4.2254 \Rightarrow \boxed{V = 0.8106T + 0.3996}$$

- b) El coeficiente de correlación lineal es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas.

$$r = \frac{\sigma_{TV}}{\sigma_T \cdot \sigma_V} = \frac{4.9234}{2.4645 \cdot 2.1176} \simeq 0.9434$$

Hemos obtenido un valor muy próximo a 1 por lo que la relación entre las dos variables es muy fuerte.

- c) Para una ocupación turística en dicho mes de 2.000 visitantes, es decir, $T = 2$ hallamos el valor de V.

$$V = 0.8106 \cdot 2 + 0.3996 = 2.0208$$

Las ventas esperadas son de 2020.8 euros.