

MATEMÁTICAS

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

Opción A

1. a) [1.5 puntos] Dado un parámetro real k , se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule $C = A \cdot B$ y $D = B \cdot A$. Para cada una de las matrices C y D , calcule su determinante y los valores de k para los que esa matriz tiene inversa.

- b) [1.5 puntos] Disponemos de tres materias primas X , Y y Z con las que creamos tres productos diferentes A , B y C . El producto A lleva un 60 % de X , un 20 % de Y . El producto B lleva un 40 % de X y un 40 % de Y . El producto C lleva un 20 % de X y un 40 % de Y . En los tres casos, el resto hasta completar el 100 % se rellena con Z . Sabiendo que el coste de cada unidad de A es 46 €, el de B es 52 € y el de C es 72 €, plantee un sistema lineal para el cálculo del coste de cada una de las materias primas y resuélvalo, si es posible, por el método de Gauss.

2. a) [2 puntos] Sea $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$. Calcule $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
El ángulo se puede expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los todos los cálculos.
- b) [1 punto] Calcule la ecuación explícita de la recta perpendicular al segmento de extremos $A = (0, -1)$ y $B = (3, 0)$ que pasa por el origen de coordenadas.
3. En este ejercicio, las funciones trigonométricas que aparecen tienen como argumentos los ángulos en radianes.

- a) [1 punto] Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcule para qué valores de a y b es f continua y derivable en $x = 0$.

- b) [1 punto] Sea $f(x) = e^x \sin x$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
- c) [2 puntos] Calcule

$$\int_0^1 x e^x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx$$

**Opción B**

1. a) [1.5 puntos] Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule el $\det(A)$. Justifique que B es la inversa de A y use este hecho para calcular el $\det(B)$ sin usar la regla de Sarrus ni el desarrollo por filas o columnas.

- b) [1.5 puntos] Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss y clasifíquelo según el número de sus soluciones

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 17 \\ 3x + 4y + 2z = 19 \\ 5x + 16y + 2z = 49 \end{cases}$$

2. a) [2 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1)$. Justifique que forman una base y escriba cada uno de los vectores $\vec{p} = (1, 0)$ y $\vec{q} = (0, 1)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- b) [1 punto] El lado a de un triángulo isósceles mide 10 m y los dos ángulos adyacentes a ese lado miden 85° cada uno. ¿Cuánto mide la altura perpendicular a ese lado a ? ¿Y cada uno de los otros dos lados?

Use al menos 4 decimales en los todos los cálculos.

3. Sea $f(x) = x(12 - 2x)^2$.

- a) [3 puntos] Calcule los puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes, sus máximos y sus mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los límites de $f(x)$ cuando x tiende respectivamente hacia menos infinito y más infinito. Con todos esos datos, esboce una gráfica de $y = f(x)$.
- b) [1 punto] Calcule el área encerrada entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje de abscisas.