

MATEMÁTICAS. EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

Opción A

1. a) [1.5 puntos] Dado un parámetro real k , se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule $C = A \cdot B$ y $D = B \cdot A$. Para cada una de las matrices C y D , calcule su determinante y los valores de k para los que esa matriz tiene inversa.

- b) [1.5 puntos] Disponemos de tres materias primas X , Y y Z con las que creamos tres productos diferentes A , B y C . El producto A lleva un 60 % de X , un 20 % de Y . El producto B lleva un 40 % de X y un 40 % de Y . El producto C lleva un 20 % de X y un 40 % de Y . En los tres casos, el resto hasta completar el 100 % se rellena con Z . Sabiendo que el coste de cada unidad de A es 46 €, el de B es 52 € y el de C es 72 €, plantee un sistema lineal para el cálculo del coste de cada una de las materias primas y resuélvalo, si es posible, por el método de Gauss.

Solución:

a)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = (k^2 + 1), \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & k^2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trivialmente $\det(C) = k^2 + 1$ y, por tener una fila de ceros, $\det(D) = 0$. $\det(C) \neq 0$ para todo k , luego C tiene inversa para todo k . Por otro lado $\det(D) = 0$ para todo k , luego D no tiene inversa para ningún k .

- b) Sea x, y, z los costes unitarios de X , Y , y Z respectivamente. Se tiene que

$$\begin{cases} 0.6x + 0.2y + 0.2z = 46 \\ 0.4x + 0.4y + 0.2z = 52 \\ 0.2x + 0.4y + 0.4z = 72 \end{cases}$$

Resolvemos, como nos piden, por el método de Gauss. Vamos a utilizar la matriz ampliada del



sistema, pero se puede hacer también usando las ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 & | & 46 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & | & 52 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & | & 72 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow 2F_3 - F_1}]{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 & | & 46 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & | & 64 \\ 0 & 1.0 & 1.0 & | & 170 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3 \rightarrow 5F_3 - 4F_2}]{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 & | & 46 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & | & 64 \\ 0 & 0 & 3.0 & | & 360 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular superior resultante mediante sustitución regresiva:

$$\begin{cases} 0.6x + 0.2y + 0.2z = 46 \\ \quad 0.8y + 0.2z = 64 \\ \quad \quad 3.0z = 360 \end{cases}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} z &= \frac{360}{3} = 120, \\ y &= \frac{1}{0.8}(64 - 0.2 \cdot 120) = 50, \\ x &= \frac{1}{0.6}(46 - 0.2 \cdot 50 - 0.2 \cdot 120) = 20. \end{aligned}$$

El coste de cada unidad de X es 20 €, el de cada unidad de Y es de 50 € y el de cada unidad de Z es de 120 €.

2. a) [2 puntos] Sea $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$. Calcule $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
El ángulo se puede expresar en grados o en radianes; use al menos 4 decimales en los todos los cálculos.
- b) [1 punto] Calcule la ecuación explícita de la recta perpendicular al segmento de extremos $A = (0, -1)$ y $B = (3, 0)$ que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + 2 = 3$, $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Luego

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0.9487 \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.3218 \text{ rad} = 18.4349^\circ = 18^\circ 26' 5.82''$$

b) La pendiente del segmento $\overline{AB}$ es

$$m = \frac{0 + 1}{3 - 0} = \frac{1}{3},$$

Luego la recta pedida es

$$y - 0 = \frac{-1}{m}(x - 0) \iff y = -3x.$$

3. En este ejercicio, las funciones trigonométricas que aparecen tienen como argumentos los ángulos en radianes.

a) [1 punto] Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcule para qué valores de a y b es f continua y derivable en $x = 0$.

b) [1 punto] Sea $f(x) = e^x \sin x$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) [2 puntos] Calcule

$$(i) \quad \int x e^x dx, \quad (ii) \quad \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx$$

Solución:

a) Para que sea continua es necesario que los límites laterales existan y coincidan. En este caso, $f(0^-) = 0$ y $f(0^+) = b$, luego es necesario que $b = 0$. Como $f(0) = 0$, esta condición también es suficiente.

Si los límites laterales de la derivada existen, una condición necesaria y suficiente de derivabilidad es que coincidan. Sabemos que $f'(x) = 2x$ si $x < 0$ y $f'(x) = a$ si $x > 0$, luego $f'(0^-) = 0$ y $f'(0^+) = a$. Por tanto f es derivable en $x = 0$ si y solo si $a = 0$.

b) Tenemos que $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$. Como $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, usando la ecuación punto-pendiente de la recta, la tangente pedida es $y = x$.

c) (i) Para la primera integramos por partes, tomando $u = x$, $dv = e^x dx$, con lo que $du = dx$ y $v = e^x$.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C,$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es la llamada constante de integración.

(ii) Para la segunda usamos que una primitiva de $\cos x$ es $\sin x$, y por tanto una primitiva de $\cos(2x)$ es $\frac{1}{2} \sin(2x)$. Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 0 = 0.$$

Opción B

1. a) [1.5 puntos] Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule el $\det(A)$. Justifique que B es la inversa de A y use este hecho para calcular el $\det(B)$ sin usar la regla de Sarrus ni el desarrollo por filas o columnas.

- b) [1.5 puntos] Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss y clasifíquelo según el número de sus soluciones

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 17 \\ 3x + 4y + 2z = 19 \\ 5x + 16y + 2z = 49 \end{cases}$$

Solución:

- a) El determinante se puede hacer por la regla de Sarrus. Sin embargo, es más sencillo desarrollarlo por la segunda fila.

$$\det(A) = (-1)^{1+2} \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \times (-2 + 1) = 1.$$

Para justificar que es la inversa, hacemos el producto.

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2-1 & -1+3-2 & 0-1+1 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+2-2 & 1+3-4 & 0-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos el determinante de B . Por un lado $\det(AB) = \det(I) = 1$ y por otro lado $\det(AB) = \det(A) \det(B) = 1 \det(B)$, luego $\det(B) = 1$.

Nota:

- Aunque el producto de matrices no es conmutativo, si A es cuadrada e invertible y $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$, sin necesidad de comprobar que $BA = I$. Efectivamente: $AB = I \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \Rightarrow IB = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$.

- b) Resolvemos, como nos piden, por el método de Gauss. Vamos a utilizar la matriz ampliada del sistema, pero se puede hacer también usando las ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 17 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \\ 5 & 16 & 2 & 49 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow 2F_3 - 5F_1]{F_2 \rightarrow 2F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & -7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & -1 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 17 \\ 0 & -7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



El sistema es compatible indeterminado. Calculamos x e y en función de z resolviendo el sistema triangular superior

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 17 \\ -7y + z = -13 \end{cases}$$

Tenemos que

$$y = \frac{13}{7} + \frac{1}{7}z,$$

$$x = \frac{17}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{13}{7} + \frac{1}{7}z \right) - \frac{z}{2} = \frac{27}{7} - \frac{6}{7}z.$$

Introduciendo un parámetro real λ , podemos escribir la solución como

$$x = \frac{27}{7} - \frac{6}{7}\lambda, \quad y = \frac{13}{7} + \frac{1}{7}\lambda, \quad z = \lambda.$$

2. a) [2 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1)$. Justifique que forman una base y escriba cada uno de los vectores $\vec{p} = (1, 0)$ y $\vec{q} = (0, 1)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- b) [1 punto] El lado a de un triángulo isósceles mide 10 m y los dos ángulos adyacentes a ese lado miden 85° cada uno. ¿Cuánto mide la altura perpendicular a ese lado a ? ¿Y cada uno de los otros dos lados?

Use al menos 4 decimales en los todos los cálculos.

Solución:

- a) Hay muchas formas de justificar que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base: son dos vectores no colineales en $\mathbb{R}^2$, o el determinante de la matriz formada por sus coordenadas es -2 , que es distinto de cero, o sus componentes no son proporcionales, etc ...

Es fácil ver a ojo que $(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1)$ y que $(0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1)$. Por supuesto, la forma canónica de hacer esto es plantear un sistema lineal: $\vec{p} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Componente a componente esto se lee como

$$1 = x + y, \quad 0 = x - y,$$

de donde sale $x = y = \frac{1}{2}$, y análogamente para $\vec{q}$.

- b) Con los datos que nos dan, y llamando h a la altura en metros, se tiene que

$$\operatorname{tg} 85^\circ = \frac{h}{5} \Rightarrow h = 5 \operatorname{tg} 85^\circ = 57.1503.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos $a/2$ y h , se tiene que la longitud b del lado es

$$b = \sqrt{5^2 + (5 \operatorname{tg} 85^\circ)^2} = \frac{5}{\cos 85^\circ} = 57.3686.$$

La altura mide 57.1503 m y cada uno de los otros lados 57.3686 m.

3. Sea $f(x) = x(12 - 2x)^2$.

- a) [3 puntos] Calcule los puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes, sus máximos y sus mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los límites de $f(x)$ cuando x tiende respectivamente hacia menos infinito y más infinito. Con todos esos datos, esboce una gráfica de $y = f(x)$.
- b) [1 punto] Calcule el área encerrada entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje de abscisas.

Solución:

- a) Punto de corte con el eje OY : $f(0) = 0$, luego el $(0, 0)$. Para hallar los puntos de corte con el eje OX resolvemos $x(12 - 2x)^2 = 0$. Como ya está factorizado, es obvio que las únicas soluciones son $x = 0$ y $x = 6$, que nos da los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$.

Calculamos la derivada. Para ello es más sencillo escribir $f(x) = x(144 - 48x + 4x^2) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$. Se tiene que

$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12).$$

Igualando a cero y resolviendo se tiene

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \iff x = 2 \text{ o } x = 6.$$

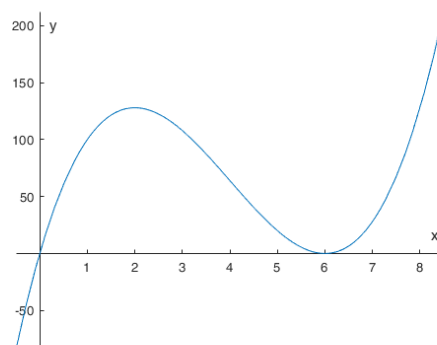
Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- Si $x < 2$, $f'(x) > 0$, luego f es creciente en $(-\infty, 2)$.
- Si $2 < x < 6$, $f'(x) < 0$, luego f es decreciente en $(2, 6)$.
- Si $x > 6$, $f'(x) > 0$, luego f es creciente en $(6, +\infty)$.

Esto sería suficiente para concluir que en $x = 2$ hay un máximo relativo y en $x = 6$ hay un mínimo relativo. También se puede calcular $f''(x) = 12(2x - 8)$ y comprobar que $f''(2) = -48 < 0$ y $f''(6) = 48 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(12 - 2x)^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(12 - 2x)^2 = +\infty$$



- b) A la vista de los cálculos y de la gráfica, está claro que el área pedida se calcula como

$$A = \int_0^6 (4x^3 - 48x^2 + 144x) dx = \left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=6} = 6^4 - 16 \cdot 6^3 + 72 \cdot 6^2 = 432.$$



MATEMÁTICAS: CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Opción A

1. a) [1.5 puntos] 0.25 puntos por el cálculo de C + 0.25 puntos por el cálculo de D + 0.25 puntos por el cálculo de cada uno de los dos determinantes + 0.25 puntos por identificar los valores de k pedidos en cada uno de los dos casos.
b) [1.5 puntos] 0.5 puntos por plantear el problema + 0.5 puntos por la triangularización + 0.5 puntos por la respuesta final
2. a) [2 puntos] 0.25 puntos por cada operación y 1 punto por el ángulo.
b) [1 punto] 1 punto por la ecuación de la recta.
3. a) [1 punto] 0.5 puntos por cada parámetro correcto.
b) [1 punto] 1 punto por la ecuación de la recta.
c) [2 puntos] 1 punto por cada integral.

Opción B

1. a) [1.5 puntos] 0.5 puntos por el determinante de A + 0.5 puntos la justificación pedida + 0.5 puntos por el cálculo del determinante de B .
b) [1.5 puntos] 0.5 puntos por la triangularización + 0.5 puntos por la clasificación + 0.5 puntos por la respuesta final.
2. a) [2 puntos] 1 punto por justificar que forman una base + 0.5 puntos por las coordenadas de cada uno de los dos vectores dados.
b) [1 punto] 0.5 puntos por la altura + 0.5 puntos por la medida común de los otros lados.
3. a) [3 puntos]
 - 0.5 puntos por los puntos de corte.
 - 0.75 puntos por los máximos y mínimos relativos
 - 0.75 puntos por los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - 0.5 puntos por los límites en el infinito.
 - 0.5 puntos por la gráfica, siempre que esté debidamente justificada mediante los cálculos anteriores.
b) [1 punto] 0.5 puntos por el planteamiento + 0.5 puntos por la solución.