

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes puntuen igual i cada un val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Un caixer conté 1330 € en bitllets de 10 €, de 20 € i de 50 €. Hi ha un total de 97 bitllets, i el nombre de bitllets de 10 € és el doble que el nombre de bitllets de 20 €. Plantejau un sistema d'equacions per saber quants de bitllets hi ha de cada tipus (4 punts). Resoleu aquest sistema i digau quants de bitllets hi ha de cada tipus (2 punts).

b) Sigui la matriu $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ b & -2 \end{pmatrix}$. Se sap que el determinant de la seva matriu inversa val 4. Quin és el valor de b ? (4 punts)

P2) a) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x^2, & \text{si } x > 0, \end{cases}$ determinau els valors de a, b i c perquè la funció sigui contínua, tenguí un valor mínim a $x = -1$ i la derivada a $x = -2$ sigui -2 (5 punts).

b) En un mateix gràfic, representau la paràbola $y = x^2 - 3x$ i la recta d'equació $y = 3x$ i calculau-ne i assenyalau-ne els punts de tall (2 punts). Calculau l'àrea del recinte limitat per aquestes dues funcions (3 punts).

P3) a) Determinau l'equació d'una recta que passa pel punt **A** = (-1,3,4) i pel punt mitjà dels punts **B** = (2,-1,3) i **C** = (-4,3,3) (5 punts).

b) Determinau l'equació del pla que és perpendicular a la recta d'equacions

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+4}{2}$$

i que passa pel punt d'intersecció del pla $x + y + z = 1$ i la recta d'equacions $\begin{cases} 2x - y + 2z = -1, \\ -3x + 2y - z = 0, \end{cases}$ (5 punts).

P4) Els alumnes d'un institut, o tenen els cabells rossos o els tenen morenos, o tenen els ulls clars o els tenen fosc. Dels 800 alumnes d'aquest institut, 340 tenen els ulls clars, 375 són rossos i 160 són rossos amb els ulls fosc. S'escull un alumne a l'atzar:

- a)** Identificau els successos adequats i elaborau completament la taula de contingència (2 punts).
- b)** Calculau la probabilitat que l'alumne sigui ros (2 punts).
- c)** Calculau la probabilitat que l'alumne tengui els ulls foscos (2 punts).
- d)** Calculau la probabilitat que l'alumne sigui moreno i tengui els ulls clars (2 punts).
- e)** Calculau la probabilitat que l'alumne sigui moreno, sabent que té els ulls clars (2 punts).

Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Totes les respostes han d'estar justificades.

P1)

- a) Plantejar correctament el sistema: 4 punts.
Solució correcta del sistema donant els preus demanats: 2 punts.
Si el sistema plantejat no és correcte, però està correctament resolt: màxim de 2 punts.
Si no s'indica de forma explícita quants de bitllets hi ha de cada tipus, cal restar 0,5 punts.
- b) Plantejament de l'equació associada al problema: 2 punts.
Solució correcta de l'equació: 2 punts.
Si tan sols dona el valor correcte sense cap explicació i/o justificació: 0 punts.

P2)

- a) Expressió correcta de cada condició com una equació: 3 punts, 1 punt per condició.
Càlcul correcte dels valors demanats: 2 punts.
Si s'equivoquen en calcular la derivada del polinomi de segon grau: 0 punts.
- b) Gràfic correcte amb indicació dels punts de tall: 1 punt.
Càlcul dels punts de tall: 1 punt.
Càlcul correcte de l'àrea demanada: 3 punts.
Si les primitives estan ben calculades, però no l'àrea: màxim 1 punt.

P3)

- a) Càlcul correcte del punt mitjà $(B + C)/2 = (-1,1,3)$: 2 punts.
Determinació de qualsevol equació de la recta: 3 punts.
- b) Determinació del vector normal del pla: 1 punt. Càlcul del punt d'intersecció del pla amb la recta: 2 punts. Determinació correcta de l'equació del pla: 2 punts.

P4)

- a) Identificar els successos i els seus complementaris: 1 punt, 0,25 punts per cadascun.
Donar i completar la taula de contingència: 1 punt.
- b) , c), d) i e): Identificar el succés del qual ens demanen la probabilitat: 1 punt.
Calcular correctament la probabilitat demanada: 1 punt.

Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes puntuen igual i cada un val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Un caixer conté 1330 € en bitllets de 10 €, de 20 € i de 50 €. Hi ha, un total, de 97 bitllets, i el nombre de bitllets de 10 € és el doble que el nombre de bitllets de 20 €. Plantejau un sistema d'equacions per conèixer quants bitllets hi ha de cada tipus (4 punts). Resolent aquest sistema, quants bitllets hi ha de cada tipus? (2 punts)

b) Sigui la matriu $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ b & -2 \end{pmatrix}$. Se sap que el determinant de la seva matriu inversa val 4. Quin és el valor de b ? (4 punts)

Solució:

a) Siguin: x, y, z el nombre de bitllets de 10 €, de 20 € i de 50 € respectivament.

D'aquesta manera, l'enunciat es tradueix en el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y + z = 97, \\ x = 2y, \\ 10x + 20y + 50z = 1330. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 97, \\ x = 2y, \\ x + 2y + 5z = 133. \end{cases}$$

La solució és: $x = 64$, $y = 32$, $z = 1$. Així, hi ha 64 bitllets de 10 €, 32 bitllets de 20 € i un bitllet de 50 €.

b) Sigui A^{-1} la matriu inversa. Sabem que el determinant d' A^{-1} val 4. A més se sap que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. A més $\det(A) = 2 + 3b$. Per tant, hem de resoldre l'equació

$$4 = \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow 4 = \frac{1}{2 + 3b} \Rightarrow b = -7/12.$$

P2) a) Donada la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x^2, & \text{si } x > 0, \end{cases}$. Determinau els valors de a, b i c perquè la funció sigui continua, tingui un valor mínim a $x = -1$ i la derivada en $x = -2$ sigui 2. (5 punts)

b) En un mateix gràfic, representau la paràbola $y = x^2 - 3x$ i la recta d'equació $y = 3x$ i calculau-ne i assenyalau-ne els punts de tall

(2 punts). Calculau l'àrea del recinte limitat per aquestes dues funcions (3 punts).

Solució:

a) La condició de continuïtat ens dona l'equació següent:

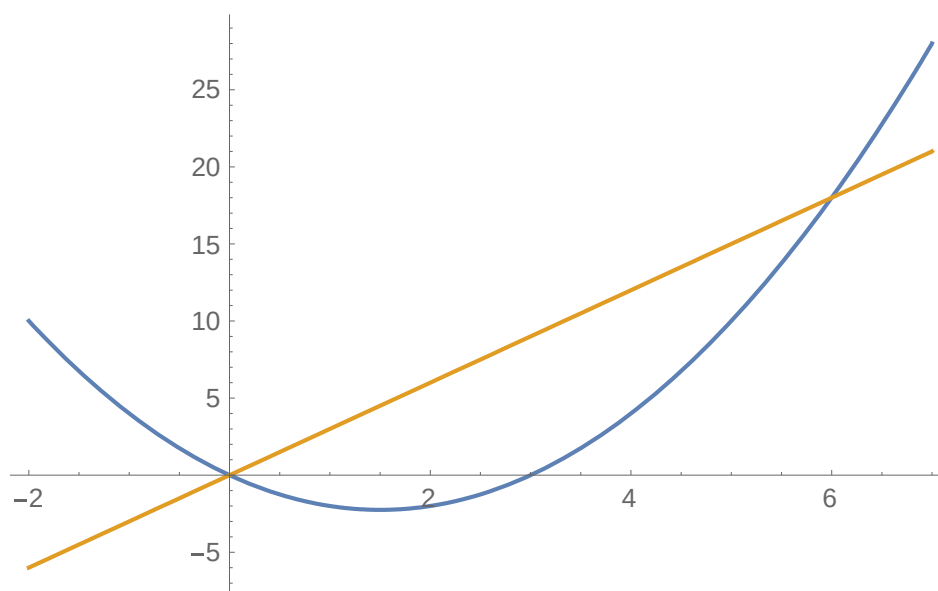
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) \Rightarrow c = 1.$$

La segona condició ens diu que $f'(-1) = 0$, per tant com que $f'(x) = 2ax + b$, tenim que ha de ser $f'(-1) = -2a + b = 0$, d'on $b = 2a$.

Finalment, $f'(-2) = 2$, ens porta al fet que $-4a + b = -2$.

Resolent el sistema d'equacions donat per $b = 2a$ i $-4a + b = -2$, s'obté que $a = 1, b = 2$.

b) El gràfic demanat, sense els punts de tall, és:



Els punts de tall són $(0,0)$ i $(6,18)$.

Ens demanen calcular la integral $\int_0^6 (3x - (x^2 - 3x)) dx$,

$$\int_0^6 (3x - (x^2 - 3x)) dx = \int_0^6 (6x - x^2) dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right)_0^6 = 3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3} - 0 = 36.$$

P3)) a) Determinau l'equació d'una recta que passa per el punt **A** = $(-1,3,4)$ i per el punt mitjà dels punts **B**= $(2,-1,3)$ i **C**= $(-4,3,3)$. (5 punts)

b) Determinau l'equació del pla que és perpendicular a la recta d'equacions

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+4}{2}$$

i que passa per el punt d'intersecció del pla $x + y + z = 1$ i la recta d'equacions

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -1, \\ -3x + 2y - z = 0, \end{cases} \quad (5 \text{ punts})$$

Solució:

a) Per calcular el punt mitjà **M** hem fer:

$$\frac{B+C}{2} = (-1, 1, 3),$$

Així, la recta demana ha de passar pels punts **A** = (-1,3,4) i **M**=(-1,1,3).
Per tant, el vector director de la recta serà

$$\overrightarrow{AM} = (-1, 1, 3) - (-1, 3, 4) = (0 - 2, -1),$$

D'on, l'equació demanada és

$$(x, y, z) = (-1, 3, 4) + t(0 - 2, -1).$$

b) Com que la recta i el pla demanat son perpendiculars, tenim que el vector normal del pla és el vector director de la recta $\vec{n} = (2, -1, 2)$.

El punt d'intersecció del pla $x + y + z = 1$ i la recta d'equacions

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -1, \\ -3x + 2y - z = 0, \end{cases} \text{ és } \mathbf{P} = (1, 1, -1).$$

L'equació del plano tindrà la forma $2x - y + 2z + D = 0$, però com que ha de passar pel punt **P**, **D** = 1.

Així, l'equació del pla es

$$2x - y + 2z + 1 = 0.$$

P4) Els alumnes d'un institut, o té el pèl ros o el tenen moreno, o tenen els ulls clars o els tenen foscos. Dels 800 alumnes d'aquest institut, 340 tenen els ulls clars, 375 són morenos i 160 són rossos amb els ulls foscos. S'escull un alumne a l'atzar.

a) Identificau els successos adequats i elaborau completament la taula de contingència. (2 punts)

b) Calculau la probabilitat que l'alumne sigui ros. (2 punts)

c) Calculau la probabilitat que l'alumne tingui els ulls foscos. (2 punts)

d) Calculau la probabilitat que l'alumne sigui moreno i tingui els ulls clars. (2 punts)

- e)** Calculeu la probabilitat que l'alumne sigui moreno sabent que té els ulls clars. (2 punts)

Solució:

- a) Considerem els successos següents:

A = «tenir els ulls clars», B = «tenir el pèl moreno», i siguin M' , F' els seus complementaris, aleshores $A' =$ «tenir els ulls foscos», $F' =$ «tenir el pèl ros».

La taula de contingència serà

	A	A'	Total
B	125	300	425
B'	215	160	375
	340	460	800

b) $P(B') = \frac{375}{800}$. c) $P(A') = \frac{460}{800}$. d) $P(A \cap B) = \frac{125}{800}$. e) $P(B/A) = \frac{125}{340}$.