

Instrucciones: Se deberá contestar a una de las dos opciones propuestas, A o B. **Se contestará únicamente a los CUATRO ejercicios propuestos en la opción seleccionada.** En caso de que se resuelvan más de cuatro ejercicios, **se corregirán solamente los ejercicios de la opción de la que sea el primer ejercicio** que aparezca en la resolución del examen. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Sólo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

A1. Sea el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y + kz = 5 \end{cases}; k \in \mathbb{R}.$$

- Discute el sistema, indicando claramente el número de soluciones en función de parámetro k . **(1 punto)**
- Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para el valor $k = 1$. **(1,5 puntos)**

Solución:

- El determinante de la matriz de coeficientes es $-7k - 14$ y se anula solamente para $k = -2$. Entonces, para $k \neq -2$ el rango de la matriz de coeficientes es 3, el sistema es compatible determinado y tendría una única solución. Para estudiar el caso $k = -2$, podemos aplicar el método de Gauss a la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz de coeficientes es dos y el de la matriz ampliada también. Así, el sistema es compatible indeterminado y tendría infinitas soluciones.

Criterios de corrección:

Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes, 0,25; estudio del caso $k \neq -2$ y decir el número de soluciones, 0,25; estudio del caso $k = -2$ y decir el número de soluciones, 0,25; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

- La solución es $x = 1, y = 1, z = 0$.

Criterios de corrección:

Solución final correcta, 0,25; decir y justificar el método de resolución, 1 punto; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

A2. Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 9 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^3 - 9x}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$

- Estudia la continuidad de la función $f(x)$ en todo su dominio. **(1,25 puntos)**
- Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 5$. **(1,25 puntos)**

Solución:

- La función es continua en toda la recta real salvo, tal vez, en $x = 3$ porque se trata de un polinomio ($x < 3$) o un cociente de polinomios ($x > 3$) en los que no se anula el denominador. Veamos qué pasa en $x = 3$:
 - $f(3) = 3^2 + 9 = 18$.
 - $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x(x + 3) = 3(3 + 3) = 18$.
 - $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 + 9 = 18$.

Por tanto, la función también es continua en $x = 3$ y sería continua en toda la recta real.

Criterios de corrección:

Decir que la función es continua en toda la recta real, 0,25; discutir el caso $x = 3$, 0,75; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

- b) La derivada de la función cuando $x > 3$ es $f'(x) = 2x + 3$ y $f'(5) = 13$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente que se pide es $y = f(5) + 13(x - 5) = 40 + 13(x - 5) = 13x - 25$.

Criterios de corrección:

Dar la ecuación de la recta correctamente, 0,25; obtener la derivada de la función, 0,25 puntos; determinar el punto de la gráfica y la pendiente de la recta tangente, 0,5 puntos; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

A3. Calcula las siguientes integrales:

- a) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$. **(1,25 puntos)**
b) $\int \frac{x}{3x^2+1} dx$. **(1,25 puntos)**

Solución:

- a) La integral se puede resolver aplicando integración por partes dos veces si se toma $u = x^2$ y $dv = e^{-x}$ la primera vez y $u = x$ y $dv = e^{-x}$ la segunda vez. La integral es $\int x^2 \cdot e^{-x} dx = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + C$.

Criterios de corrección:

Dar la solución correcta, 0,25; justificar el método de resolución, 0,75; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

- b) La integral es inmediata porque el numerador es la derivada del denominador (salvo una constante). La solución es $\int \frac{x}{3x^2+1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2+1} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 1) + C$.

Criterios de corrección:

Dar la solución correcta, 0,25; justificar el método de resolución, 0,75; realizar las operaciones correctamente, 0,25.

A4. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, a, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determina el valor de a para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares. **(0,75 puntos)**
b) Sean los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + z = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + by + z = 0$, con $b \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de b para el que los planos π_1 y π_2 sean paralelos? Justifica tu respuesta. **(0,75 puntos)**
c) Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π_1 y que pasa por el punto $A = (0, 0, 1)$ de dicho plano. **(1 punto)**

Solución:

- a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán perpendiculares cuando su producto escalar sea cero. Por tanto, tenemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + a + 1 = 0$ si y sólo si $a = 1$.

Criterios de corrección:

Dar el valor de a correcto, 0,25; justificar el método de resolución, 0,25; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

- b) Los planos π_1 y π_2 serán paralelos si sus vectores normales son paralelos. Estos vectores son $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$ y $\vec{u}_2 = (2, b, 1)$, respectivamente. Para que fuesen paralelos uno debería ser el otro por un escalar, pero eso es imposible porque $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$ para cualquier valor de b . Por tanto, no existe ningún valor de b para el que los planos sean paralelos.

Criterios de corrección:

Decir que no existe ningún valor de b tal que los planos sean paralelos, 0,25; justificar el método de resolución, 0,25; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

- c) Esta recta sería la definida por el vector $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$ y el punto $A = (0, 0, 1)$. Por tanto, la recta sería, la definida así: $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Criterios de corrección:

Dar la solución correcta, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

Instrucciones: Se deberá contestar a una de las dos opciones propuestas, A o B. **Se contestará únicamente a los CUATRO ejercicios propuestos en la opción seleccionada.** En caso de que se resuelvan más de cuatro ejercicios, **se corregirán solamente los ejercicios de la opción de la que sea el primer ejercicio** que aparezca en la resolución del examen. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Sólo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

B1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calcula razonadamente el rango de B . **(1 punto)**
- Despeja X en la ecuación matricial $-B = 2AX + I$, donde I es la matriz identidad 3×3 . Calcula el valor de X que cumple dicha ecuación matricial. **(1,5 puntos)**

Solución:

- Tenemos que $|B| = 0$, por lo que el rango será 2, como mucho. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, el rango de B es 2.

Criterios de corrección:

Dar la solución final, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5; realizar las operaciones razonadamente, 0,25.

- La solución es $X = \frac{1}{2}A^{-1}(-B - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donde $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Criterios de corrección:

Dar la solución final, 0,25; despejar X correctamente, 0,25; calcular $B + I$, 0,25; calcular la inversa de A , 0,5; justificar los cálculos 0,25. Si la inversa de A está mal, se considera el resto de cálculos como si fuera correcta.

B2. Sea la función $f(x) = 7 - (x + 1)^3$.

- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. **(1 punto)**
- ¿Tiene un punto de inflexión en $x = -1$? Justifica tu respuesta. **(0,5 puntos)**
- Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$. **(1 punto)**

Solución:

- La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio. Además, $f'(x) = -3(x + 1)^2$. Por tanto, la derivada siempre es negativa salvo en $x = -1$, donde es nula. Por tanto, es decreciente salvo, tal vez, en $x = -1$.

Criterios de corrección:

Determinar el intervalo de decrecimiento, 0,25; obtener la derivada, 0,25; identificar el caso en $x = -1$, 0,25; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

- Ya hemos visto que la derivada es negativa en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x = -1$. Por tanto, la única opción es que aquí haya un punto de inflexión. Lo comprobamos aplicando el criterio de la segunda derivada. Vemos que $f''(x) = -6(x + 1)$, y $f''(-1) = 0$. Así, la segunda derivada también se anula, la tercera derivada es constante y distinta de cero, $f'''(x) = -6 < 0$, y confirma que tenemos un punto de inflexión en $x = -1$.

Criterios de corrección:

Decir que tenemos un punto de inflexión en $x = -1, 0,25$; justificar que es punto de inflexión, 0,25.

- c) La ecuación de la recta normal pasa por el punto $(0, f(0)) = (0,6)$ y tiene pendiente igual a $-\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{-3}$.
Por tanto, la ecuación de la recta es $y = 6 - \frac{1}{-3}(x - 0) = 6 - \frac{x}{-3} = \frac{x}{3} + 6$.

Criterios de corrección:

Dar la ecuación correcta, 0,25; calcular la derivada, 0,25; calcular la pendiente de la recta correctamente, 0,25; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

B3. Calcula razonadamente los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x-3}$. **(1,25 puntos)**
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1}$. **(1,25 puntos)**

Solución:

- a) El límite es indeterminado del tipo 1^∞ . El resultado es $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x-3} = e^2$.

Criterios de corrección:

Dar la solución final, 0,25; identificar la indeterminación, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

- b) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y se puede resolver aplicando la regla de L'Hôpital. El resultado es $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = -\frac{1}{2}$.

Criterios de corrección:

Dar la solución final, 0,25; identificar la indeterminación, 0,25; justificar el método de resolución, 0,5; realizar los cálculos correctamente, 0,25.

B4.

- a) Sean los sucesos aleatorios A y B tales que se dan las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,2$; $P(A \cup B) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$. Calcula:
a.1) $P(B)$, $P(A \cap B^c)$ y $P(A \cup B^c)$, donde B^c es el suceso complementario de B . **(0,5 puntos)**
a.2) $P(A | B)$ y $P(B^c | A)$. **(0,75 puntos)**
b) Una empresa decide incluir anuncios publicitarios en la página web de un periódico local. Sabe que la probabilidad de que una persona que visita la página pinche en el anuncio es del 20%. En un momento dado, 8 personas visitan la página. Calcula:
b.1) La probabilidad de que ninguna de ellas pinche en el anuncio. **(0,5 puntos)**
b.2) La probabilidad de que entre 2 y 4 personas (ambas inclusive) pinchen en el anuncio. **(0,75 puntos)**

n	k	p									
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5		0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188

6	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
7		0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
8				0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

Solución:

a) a.1)

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0,2 - 0,2 + 0,1 = 0,1;$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,1 = 0,1;$$

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) = 0,2 + (1 - 0,1) - 0,1 = 1.$$

a.2)

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,1} = 1; P(B^c | A) = \frac{P(B^c \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

Criterios de corrección:

a.1) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución y hacer los cálculos correctamente, 0,25.

a.2) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución, 0,25; hacer los cálculos correctamente, 0,25.

b) Sea X la variable aleatoria que representa el número de esas 8 personas que pinchan en el anuncio. La variable se distribuye como una binomial con $n=8$ y probabilidad 0,2.

b.1) Se pide $P(X = 0) = 0,1678$.

b.2) Se pide $P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,2936 + 0,1468 + 0,0459 = 0,4863$.

Criterios de corrección:

b.1) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución y hacer los cálculos correctamente, 0,25.

b.2) Dar la solución correcta, 0,25; justificar la solución, 0,25; hacer los cálculos correctamente, 0,25.