

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Mayores de 25 y 45 años Castilla y León	MATEMÁTICAS	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	--------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada ejercicio se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + \lambda z = 1 \\ y + \lambda z = 1 \\ x - \lambda y + \lambda^2 z = 1 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (1 punto)

E2.- Hallar la recta que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+4}{3}$ y pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$. (2,5 puntos)

E3.- Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Contestar, razonando las

respuestas, a las siguientes preguntas:

- a)** ¿Es $f(x)$ continua en $x = 0$? (1 punto)
b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? (1,5 puntos)

E4.- a) Dada la función $f(x) = x^2 - |x|$, determinar los puntos del intervalo $[-1, 1]$ en los que el valor de $f(x)$ es ≥ 0 . (1 punto)

b) Calcular el área de la parte del plano limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

E1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices X tales que $AX = XA$ y $X = -X^T$, donde X^T denota la matriz traspuesta de X . **(2,5 puntos)**

E2.- Determinar la recta r que contiene al punto $P = (1, 0, -1)$ y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + 2z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$. **(2,5 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Bolzano. **(1 punto)**
b) Demostrar que la ecuación

$$x^3 - x - 7 = \frac{1}{\ln x}$$

tiene al menos una solución en el intervalo $(2, 3)$. **(1,5 puntos)**

E4.- Se considera la función $f(x) = e^{-x}(x-1)$,

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos relativos. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$. **(1,5 puntos)**

SOLUCIONES**OPCIÓN A****E1.- a)** Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + \lambda z = 1 \\ y + \lambda z = 1 \\ x - \lambda y + \lambda^2 z = 1 \end{cases}$$

(1,5 puntos)**b)** Resolverlo para $\lambda = 1$.**(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Buscamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 0 - \lambda - 0 + \lambda^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada usando el método de Gauss para obtener un sistema equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & -1 & 0 & 1}^{A/B} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & -1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3) y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Conclusión: Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $\lambda = 0$ el sistema es incompatible y si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

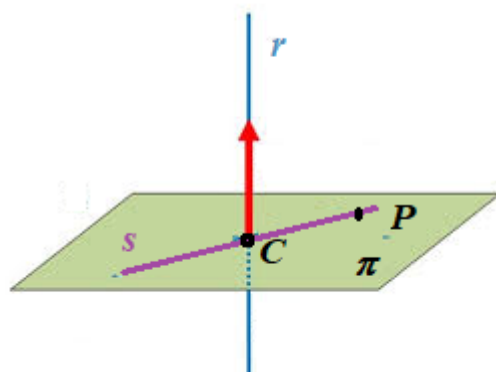
b) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación } 3^a = \text{Ecuación } 1^a \} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ z = 1 - y \end{cases} \Rightarrow x - y + 1 - y = 1 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} .$

E2.- Hallar la recta que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+4}{3}$ y pasa por el punto $P = (1,1,1)$. **(2,5 puntos)**



Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P .

Si el plano es perpendicular a la recta su vector normal es el director de la recta $\vec{v}_r = (1, 2, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 2, 3) \\ P(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + 3z + D = 0 \\ P(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -6 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0}$$

Hallamos el punto C de corte de recta y plano.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_r(0, -5, -4) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 3) \end{array} \right. \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + 3z - 6 = 0 \\ r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 2(-5 + 2\lambda) + 3(-4 + 3\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - 10 + 4\lambda - 12 + 9\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 28 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -5 + 4 = -1 \\ z = -4 + 6 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{C(2, -1, 2)}$$

La recta que corta perpendicularmente a la recta r y pasa por el punto P es la recta que pasa por los puntos P y C .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 1, 1) \in s \\ C(2, -1, 2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1, 1, 1) \in s \\ \vec{u}_s = \overrightarrow{PC} = (2, -1, 2) - (1, 1, 1) = (1, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}}$$

E3.- Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Contestar, razonando las

respuestas, a las siguientes preguntas:

a) ¿Es $f(x)$ continua en $x = 0$?

(1 punto)

b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$?

(1,5 puntos)

a) Comprobamos la continuidad de la función en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

La función es continua en $x = 0$.

b) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, siendo su derivada

$$f'(x) = \frac{x \cos x - 1 \cdot \sin x}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

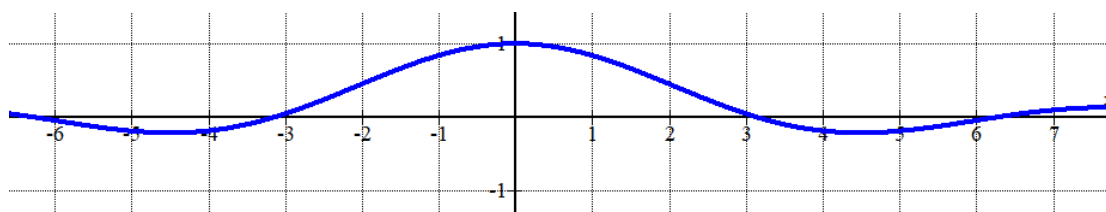
Comprobamos la derivabilidad de la función en $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{0 \cdot \cos 0 - \sin 0}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = \frac{-\sin 0}{2} = \boxed{0}$$

La función es derivable en $x = 0$, siendo su derivada $f'(0) = 0$.



E4.- a) Dada la función $f(x) = x^2 - |x|$, determinar los puntos del intervalo $[-1,1]$ en los que el valor de $f(x)$ es ≥ 0 . **(1 punto)**

b) Calcular el área de la parte del plano limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

a) Obtenemos la expresión de la función como una función definida a trozos.

$$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Buscamos cuando la función se anula.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (-\infty, 0) \\ x = -1 \end{cases} \\ x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

La función es continua y se anula en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Dividimos el intervalo $[-1,1]$ en dos intervalos y estudiamos el signo de la función en cada uno de ellos.

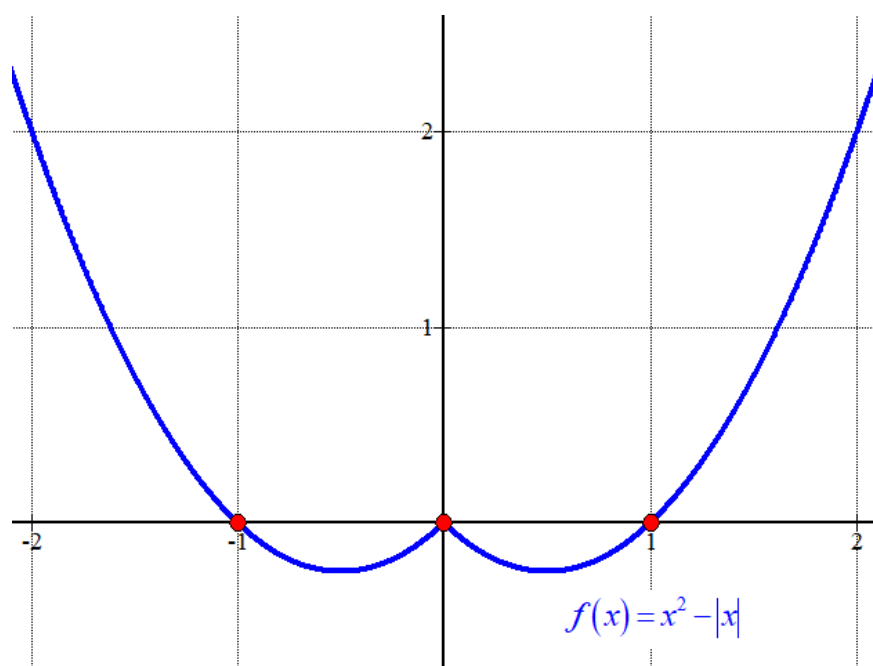
- En el intervalo $(-1,0)$ consideramos $x = -0.5$ y la función vale

$$f(-0.5) = (-0.5)^2 - 0.5 = -0.25 < 0. \text{ La función es negativa en } (-1,0).$$

- En el intervalo $(0,1)$ consideramos $x = 0.5$ y la función vale

$$f(0.5) = 0.5^2 - 0.5 = -0.25 < 0. \text{ La función es negativa en } (0,1).$$

La función vale 0 en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, en el resto de puntos del intervalo $[-1,1]$ es negativa.

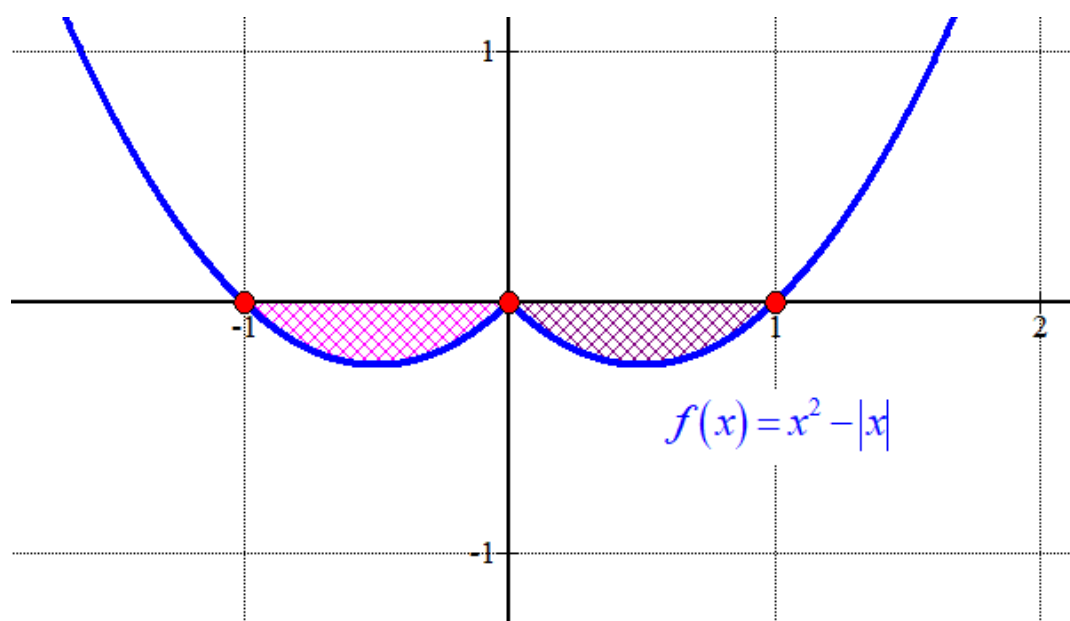


- b) Hemos visto que la gráfica de la función corta el eje de abscisas en tres puntos: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. El área de la región del plano limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas, es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 más el de la integral definida entre 0 y 1 .

$$\int_{-1}^0 x^2 + x dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 x^2 - x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Área} = \left| -\frac{1}{6} \right| + \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333 u^2$$



El área de la región del plano limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas tiene un valor de 0.333 unidades cuadradas. Como se aprecia en el dibujo el área tiene un valor muy pequeño, menor de 1 unidad cuadrada (1 cuadradito del dibujo).

OPCIÓN B

E1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices X tales que $AX = XA$ y $X = -X^T$, donde X^T denota la matriz traspuesta de X . **(2,5 puntos)**

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Averiguamos cuando $X = -X^T$.

$$X = -X^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -a \rightarrow 2a = 0 \rightarrow \boxed{a = 0} \\ b = -c \\ \boxed{c = -b} \\ d = -d \rightarrow 2d = 0 \rightarrow \boxed{d = 0} \end{cases}$$

La matriz X queda $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicamos la primera condición $AX = XA$.

$$\begin{aligned} AX = XA &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & -2b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2b = b \rightarrow -3b = 0 \rightarrow b = 0 \\ -b = b \rightarrow -2b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0} \end{cases} \end{aligned}$$

La única matriz X que cumple lo pedido es la matriz nula: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

E2.- Determinar la recta r que contiene al punto $P = (1, 0, -1)$ y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + 2z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$. **(2,5 puntos)**

Hallamos el vector director de la recta s que definen ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + 2y + 2z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2y - 2z \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2y - 2z + y + z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y - z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow x = +2z - 2z = 0 \Rightarrow s: \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (0, -1, 1)$$

La recta paralela a los planos tiene como vector director $\vec{v}_s = (0, -1, 1)$.

La recta que buscamos contiene al punto $P = (1, 0, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v}_s = (0, -1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 0, -1) \in r \\ \vec{u}_r = \vec{v}_s = (0, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

E3.- a) Enunciar el teorema de Bolzano.**(1 punto)**

b) Demostrar que la ecuación

$$x^3 - x - 7 = \frac{1}{\ln x}$$

tiene al menos una solución en el intervalo $(2, 3)$.**(1,5 puntos)**

a) **Teorema de Bolzano.** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Consideramos la función $f(x) = x^3 - x - 7 - \frac{1}{\ln x}$.

Esta función es continua en el intervalo $[2, 3]$, pues el denominador se anula para $x=1$ que no pertenece al intervalo $[2, 3]$.

Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo $[2, 3]$.

$$f(2) = 2^3 - 2 - 7 - \frac{1}{\ln 2} \approx -2.44 < 0$$

$$f(3) = 3^3 - 3 - 7 - \frac{1}{\ln 3} \approx 16.09 > 0$$

La función es continua en $[2, 3]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 0$. Para

este valor se cumple $f(c) = c^3 - c - 7 - \frac{1}{\ln c} = 0 \Rightarrow c^3 - c - 7 = \frac{1}{\ln c}$, por lo que existe

$c \in (2, 3)$ que es solución de la ecuación $x^3 - x - 7 = \frac{1}{\ln x}$.

E4.- Se considera la función $f(x) = e^{-x}(x-1)$,

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos relativos. **(1 punto)**
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$. **(1,5 puntos)**

a) El dominio de la función son todos los números reales, pues es el producto de una función exponencial y una polinómica.

Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f(x) = e^{-x}(x-1) \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}(x-1) + e^{-x}(1) = e^{-x}(-x+2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(-x+2) = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow -x+2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = e^{-0}(-0+2) = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale

$$f'(3) = e^{-3}(-3+2) = \frac{-1}{e^3} < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x=2$. No tiene mínimos relativos.

b) Averiguamos si la función corta el eje OX entre 0 y 2.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{-x}(x-1) \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow e^{-x}(x-1) = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Solo corta el eje en $x=1$ que pertenece al intervalo $[0, 2]$.

Calculamos la primitiva de la función.

$$\int f(x) dx = \int e^{-x}(x-1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= (x-1)(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = e^{-x}(1-x) + \int e^{-x} dx = e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -xe^{-x} + K$$

Calculamos el área como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas.

$$\int_0^1 e^{-x} (x-1) dx = \left[-xe^{-x} \right]_0^1 = \left[-1 \cdot e^{-1} \right] - \left[-0 \cdot e^{-0} \right] = \frac{-1}{e}$$

$$\int_1^2 e^{-x} (x-1) dx = \left[-xe^{-x} \right]_1^2 = \left[-2 \cdot e^{-2} \right] - \left[-1 \cdot e^{-1} \right] = \frac{-2}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{-2+e}{e^2}$$

El valor del área es la suma del valor absoluto de los dos valores obtenidos.

$$\text{Área} = \left| \frac{-1}{e} \right| + \frac{e-2}{e^2} = \frac{1}{e} + \frac{e-2}{e^2} = \frac{e+e-2}{e^2} = \frac{2e-2}{e^2} \approx 0.46 \text{ u}^2$$

