



PAU (MAIORES DE 25 ANOS)
2024

Código: 31

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.

1. a) Despeje la matriz X para que se verifique $B \cdot X = A$. Calcúlela para $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Resuelva matricialmente el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} y + 2z = -3 \\ 2x + y = 3 \\ x + 3y - 4z = 3 \end{cases}$$

2. a) Halle los valores de m y n para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos: $\pi_1 : 2x - y + z - 5 = 0$,
 $\pi_2 : mx + ny + 2z + 3 = 0$

b) Obtenga la ecuación de un plano paralelo a π_1 que pase por el punto $A(3, -2, 1)$.

3. Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule el valor mínimo de la función para los parámetros a y b encontrados.

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta; 0 puntos si no se contesta y -0,5 puntos si la respuesta es incorrecta.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ se verifica que $X \cdot A = B$ si

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, m, 3)$ y $\vec{w} = (-4, 5, -1)$ son coplanarios si

a) $m = \pm 4$

b) $m = -4$

c) para ningún valor de m

3. La función $f(x) = 3 + xe^{-x}$, en $x = 1$ tiene

a) Un máximo

b) Un mínimo

c) Un punto de inflexión

4. El valor de la integral definida $\int_1^{2e} \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ es

a) $2e + 1$

b) $2e + \ln 2$

c) $e - 1$

SOLUCIONES

1. a) Despeje la matriz X para que se verifique $B \cdot X = A$. Calcúlela para $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- b) Resuelva matricialmente el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y + 2z = -3 \\ 2x + y = 3 \\ x + 3y - 4z = 3 \end{cases}$

a) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$B \cdot X = A \Rightarrow X = B^{-1}A$$

Calculamos la inversa de B .

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 6 = -5 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X .

$$X = B^{-1}A = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -2 - 2 + 0 \\ 0 + 0 - 20 \\ 1 + 6 + 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 4 \\ -7/5 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \longrightarrow 3 \times 1$

b) Obtenemos la expresión matricial del sistema.

$$\begin{cases} y + 2z = -3 \\ 2x + y = 3 \\ x + 3y - 4z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

La solución del sistema es $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Calculamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 12 - 2 + 8 - 0 = 18 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{18} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 12 + 30 - 6 \\ -24 - 6 + 12 \\ -15 + 3 - 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \longrightarrow 3 \times 1$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = z = -1$.

2. a) Halle los valores de m y n para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos: $\pi_1 : 2x - y + z - 5 = 0$,
 $\pi_2 : mx + ny + 2z + 3 = 0$
- b) Obtenga la ecuación de un plano paralelo a π_1 que pase por el punto $A(3, -2, 1)$.

- a) Para que los planos sean paralelos sus vectores normales deben indicar la misma dirección, para lo cual sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - y + z - 5 = 0 \\ \pi_2 : mx + ny + 2z + 3 = 0 \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{-1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{4 = m} \\ \frac{-1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{-2 = n} \end{cases}$$

Los valores de los parámetros que hacen que los planos sean paralelos son $m = 4$ y $n = -2$.

- b) El plano paralelo a $\pi_1 : 2x - y + z - 5 = 0$ tiene ecuación $\pi_3 : 2x - y + z + D = 0$. Determinamos el valor de D para que el plano π_3 pase por el punto $A(3, -2, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_3 : 2x - y + z + D = 0 \\ A(3, -2, 1) \in \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 3 - (-2) + 1 + D = 0 \Rightarrow 9 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = -9}$$

El plano paralelo a π_1 que pasa por el punto $A(3, -2, 1)$ tiene ecuación $\pi_3 : 2x - y + z - 9 = 0$.

3. Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$.
 b) Calcule el valor mínimo de la función para los parámetros a y b encontrados.

a) La función es continua en $x = 1$ y se cumple que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 2 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + ax + b = 2 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x - 1 = \ln 1 - 1 = -1 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + a + b = -1 \Rightarrow \boxed{a + b = -3}$$

Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ se cumple que $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenida tenemos que $\left. \begin{aligned} a + b &= -3 \\ a &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = -3}$

Los valores de los parámetros buscados son $a = 0$ y $b = -3$.

b) Para los parámetros obtenidos la función queda $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

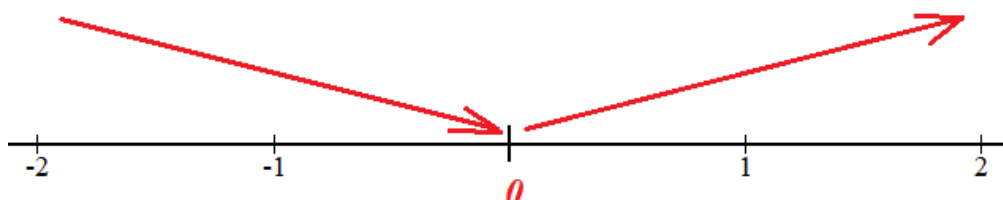
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \\ \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La función es continua, tiene un punto crítico en $x = 0$ y un cambio de definición en $x = 1$, estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

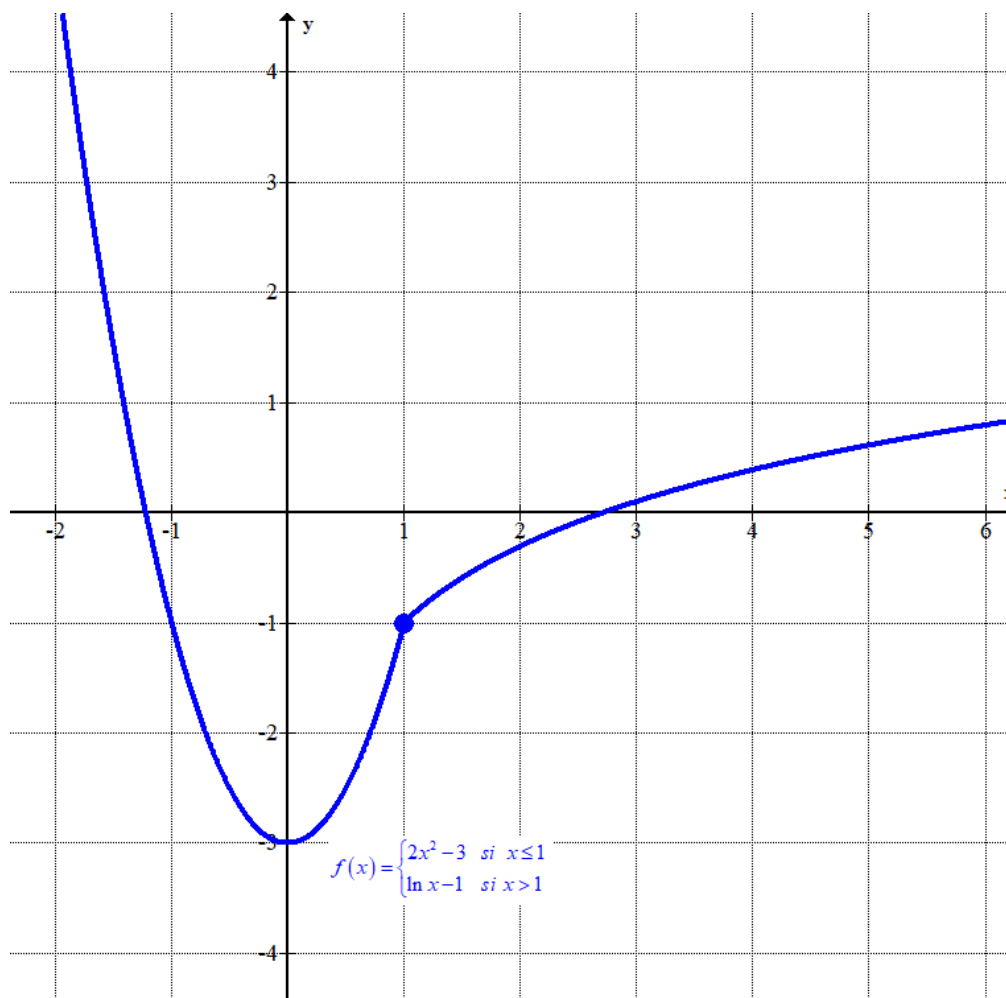
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 4(-1) = -4 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = 4 \cdot 0.5 = 2 > 0$. La función crece en $(0, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1}{2} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



El valor mínimo de la función se obtiene en $x = 0$. Como $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$ el valor mínimo de la función es -3 .



CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta; 0 puntos si no se contesta y -0,5 puntos si la respuesta es incorrecta.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ se verifica que $X \cdot A = B$ si

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Probamos en cada apartado si se cumple la igualdad $X \cdot A = B$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ No es correcto

b) $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+0 & 6-7 \\ 0+0 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Si es correcto

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+0 & \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ No es correcto

La respuesta correcta es la b).

2. Los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, m, 3)$ y $\vec{w} = (-4, 5, -1)$ son coplanarios si

- a) $m = \pm 4$
b) $m = -4$
c) para ningún valor de m

Para que sean coplanarios el determinante formado por sus coordenadas debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, -3, 1) \\ \vec{v} = (1, m, 3) \\ \vec{w} = (-4, 5, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2m + 36 + 5 + 4m - 3 - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m + 8 = 0 \Rightarrow 2m = -8 \Rightarrow m = \frac{-8}{2} = -4$$

La respuesta correcta es la b).

3. La función $f(x) = 3 + xe^{-x}$, en $x = 1$ tiene

- a) Un máximo
b) Un mínimo
c) Un punto de inflexión

Comprobamos si la derivada se anula en $x = 1$.

$$f(x) = 3 + xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x} \Rightarrow f'(1) = (1-1)e^{-1} = 0$$

Se cumple, luego puede ser correcta cualquiera de las tres respuestas dadas. Comprobamos el signo de la segunda derivada en $x = 1$.

$$f'(x) = (1-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (-1)e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (-2+x)e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(1) = (-2+1)e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda negativa la función presenta un máximo relativo en $x = 1$. La respuesta correcta es la a).

4. El valor de la integral definida $\int_1^{2e} \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ es

- a) $2e + 1$
- b) $2e + \ln 2$
- c) $e - 1$

Calculamos la integral dada.

$$\int_1^{2e} \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = [x + \ln x]_1^{2e} = [2e + \ln 2e] - [1 + \ln 1] = 2e + \ln 2 + \ln e - 1 - 0 = \boxed{2e + \ln 2}$$

La respuesta correcta es la b).