



PAU (MAIORES DE 25 ANOS)
2025

Código: 31

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS (hasta 2 puntos cada problema)

- Discuta según el valor de m el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ (m-1)y + 2z = 1 \\ 2mx + 2y - z = 1 \end{cases}$$
- Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$. Luego, calcule la distancia de ese plano al punto $R(2,3,2)$.
- Diga, razonadamente, para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + 3x^2 + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua. Luego, para qué valores de a y b es derivable.

CUESTIONES (se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 puntos si la respuesta es incorrecta):

- Si $AX + B = C$, donde A , X , B y C son matrices cuadradas de orden mayor que 1, con A invertible, entonces
 - $X = (C - B)A^{-1}$
 - $X = A^{-1}(C - B)$
 - $X = (C - B)/A$
- Los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a,1,0)$ y $R(0,3,b)$
 - son coplanarios (es decir, pertenecen a un mismo plano) solamente si $a = b = 0$.
 - son coplanarios si $b = -3a$
 - Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta.
- El valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ es
 - 1/2
 - 0
 - 1/2
- La integral definida $\int_0^b e^x dx$ es
 - vale 1 si $b = \ln 2$
 - vale 1 si $b = 1$
 - no vale 1 para ningún valor de b .

SOLUCIONES

$$1. \text{ Discuta según el valor de } m \text{ el sistema de ecuaciones lineales } \begin{cases} mx + y - z = 0 \\ (m-1)y + 2z = 1 \\ 2mx + 2y - z = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 2m & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 & 1 \\ 2m & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 2m & 2 & -1 \end{vmatrix} = -m(m-1) + \cancel{4m} - 0 + 2m(m-1) - 0 - \cancel{4m} = m(m-1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m-1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de coeficientes A y el de la matriz ampliada A/B es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A y el de A/B es 2, menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \\ -2 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Conclusión: Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m=0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m=1$ el sistema es incompatible (sin solución).

2. Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$. Luego, calcule la distancia de ese plano al punto $R(2,3,2)$.

Hallamos la ecuación del plano que pasa por $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ P(1,0,1) \in \pi \\ Q(0,1,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{OP} = (1,0,1) - (0,0,0) = (1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OQ} = (0,1,0) - (0,0,0) = (0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + z - 0 - 0 - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z = 0}$$

El plano que pasa por los puntos O, P y Q tiene ecuación $\pi : x - z = 0$.

Calculamos la distancia del plano π al punto R.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z = 0 \\ R(2,3,2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, R) = \frac{|2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

La distancia es nula, por lo que el punto R pertenece al plano π y los cuatro puntos son coplanarios.

3. Diga, razonadamente, para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + 3x^2 + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua. Luego, para qué valores de a y b es derivable.

La función es continua en $x = 0$ y se cumple que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 + 3x^2 + b = b \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Para que la función sea continua debe ser $b=1$ y a cualquier valor real.

Si la función es derivable debe serlo en $x = 0$ y se debe cumplir que $f'(0^-) = f'(0^+)$.

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(0^-) = f'(0^+) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Para que la función sea derivable debe ser $b=1$ (es continua) y $a=0$.

CUESTIONES

1. Si $AX + B = C$, donde A, X, B y C son matrices cuadradas de orden mayor que 1, con A invertible, entonces

- a) $X = (C - B)A^{-1}$
- b) $X = A^{-1}(C - B)$
- c) $X = (C - B)/A$

Despejamos X de la igualdad proporcionada.

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

La respuesta correcta es la b).

2. Los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a,1,0)$ y $R(0,3,b)$

- a) son coplanarios (es decir, pertenecen a un mismo plano) solamente si $a = b = 0$.
- b) son coplanarios si $b = -3a$
- c) Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta.

Para que sean coplanarios el determinante formado por las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ debe ser nulo.

$$\begin{array}{l} O(0,0,0) \\ P(1,0,1) \\ Q(a,1,0) \\ R(0,3,b) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OP} = (1,0,1) - (0,0,0) = (1,0,1) \\ \overrightarrow{OQ} = (a,1,0) - (0,0,0) = (a,1,0) \\ \overrightarrow{OR} = (0,3,b) - (0,0,0) = (0,3,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b + 0 + 3a - 0 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow b + 3a = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3a}$$

La respuesta correcta es la b).

3. El valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ es

- a) $-1/2$
- b) 0
- c) $1/2$

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos 0}{\sin^2 0} = \frac{1 - 1}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin x}}{2 \cancel{\sin x} \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2 \cos 0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

La respuesta correcta es la c).

4. La integral definida $\int_0^b e^x dx$ es

- a) vale 1 si $b = \ln 2$
- b) vale 1 si $b = 1$
- c) no vale 1 para ningún valor de b .

Calculamos la integral dada.

$$\int_0^b e^x dx = \left[e^x \right]_0^b = e^b - e^0 = \boxed{e^b - 1}$$

Averiguamos si son ciertas o falsas las afirmaciones de cada apartado.

$$\text{a) vale 1 si } b = \ln 2 \rightarrow \left. \int_0^b e^x dx = e^b - 1 \right\}_{b = \ln 2} \Rightarrow \int_0^b e^x dx = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1 \rightarrow \text{¡Cierta!}$$

$$\text{b) vale 1 si } b = 1 \rightarrow \left. \int_0^b e^x dx = e^b - 1 \right\}_{b = 1} \Rightarrow \int_0^b e^x dx = e^1 - 1 = e - 1 \neq 1 \rightarrow \text{¡Falsa!}$$

c) no vale 1 para ningún valor de $b \rightarrow \text{¡Falsa!}$

La respuesta correcta es la a).