



Prueba de Acceso a la Universidad para Mayores de 25 años
Convocatoria: 2024
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS
Tiempo de realización: 1.5 horas

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

PROPUESTA A:

1.- Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

- (i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
- (ii) **(1 punto)** Estudia su monotonía y sus extremos relativos o locales.
- (iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.
- (iv) **(1 punto)** Calcula el área de la región comprendida entre la función y el eje OX en el intervalo $[2, 3]$

2.- Sea a un número real. Para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + az = 1 + 2a \\ ax + z = 1 \end{cases}$$

- (i) **(2 puntos)** Discute su solución según los valores de a .
- (ii) **(1 punto)** Determina, si es posible, todas las soluciones cuando $a = 2$.

3.-

- (i) **(1.5 puntos)** Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
- (ii) **(1.5 puntos)** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano del apartado (i).



Prueba de Acceso a la Universidad para Mayores de 25 años
Convocatoria: 2024
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS
Tiempo de realización: 1.5 horas

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

PROPUESTA B:

1.- Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

- (i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
- (ii) **(1 punto)** Estudia su monotonía y sus extremos relativos o locales.
- (iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.
- (iv) **(1 punto)** Calcula el área de la región comprendida entre la función y el eje OX en el intervalo $[2, 3]$

2.- Sea a un número real. Para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + az = 1 + 2a \\ ax + z = 1 \end{cases}$$

- (i) **(2 puntos)** Discute su solución según los valores de a .
- (ii) **(1 punto)** Determina, si es posible, todas las soluciones cuando $a = 2$.

3.- Una empresa automovilística fabrica al año 1000 unidades de uno de sus modelos en dos factorías distintas ubicadas en Logroño y Pontevedra. El modelo lo fabrica en tres versiones: diesel, gasolina y eléctrico. En Logroño fabrica 650 unidades, de las cuales 300 son diesel y 100 eléctricos. En Pontevedra fabrica las otras 350 unidades, de las cuales 200 son de gasolina. El coche eléctrico no está muy demandado por lo que, en total, sólo fabrica 200 unidades al año.

- (i) (1.5 puntos) Si nos cruzamos por la calle con un coche de este modelo, ¿qué probabilidad hay de que sea de gasolina?
- (ii) (1.5 puntos) Suponiendo que sabemos que el coche que nos hemos cruzado es diesel, ¿qué probabilidad hay de que haya sido fabricado en Logroño?

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

- (i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
 (ii) **(1 punto)** Estudia su monotonía y sus extremos relativos o locales.
 (iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.
 (iv) **(1 punto)** Calcula el área de la región comprendida entre la función y el eje OX en el intervalo $[2, 3]$

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

ii) Utilizamos la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no tiene puntos críticos y por tanto no tiene máximos ni mínimos locales.

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes y después de $x=1$ (valor excluido del dominio)

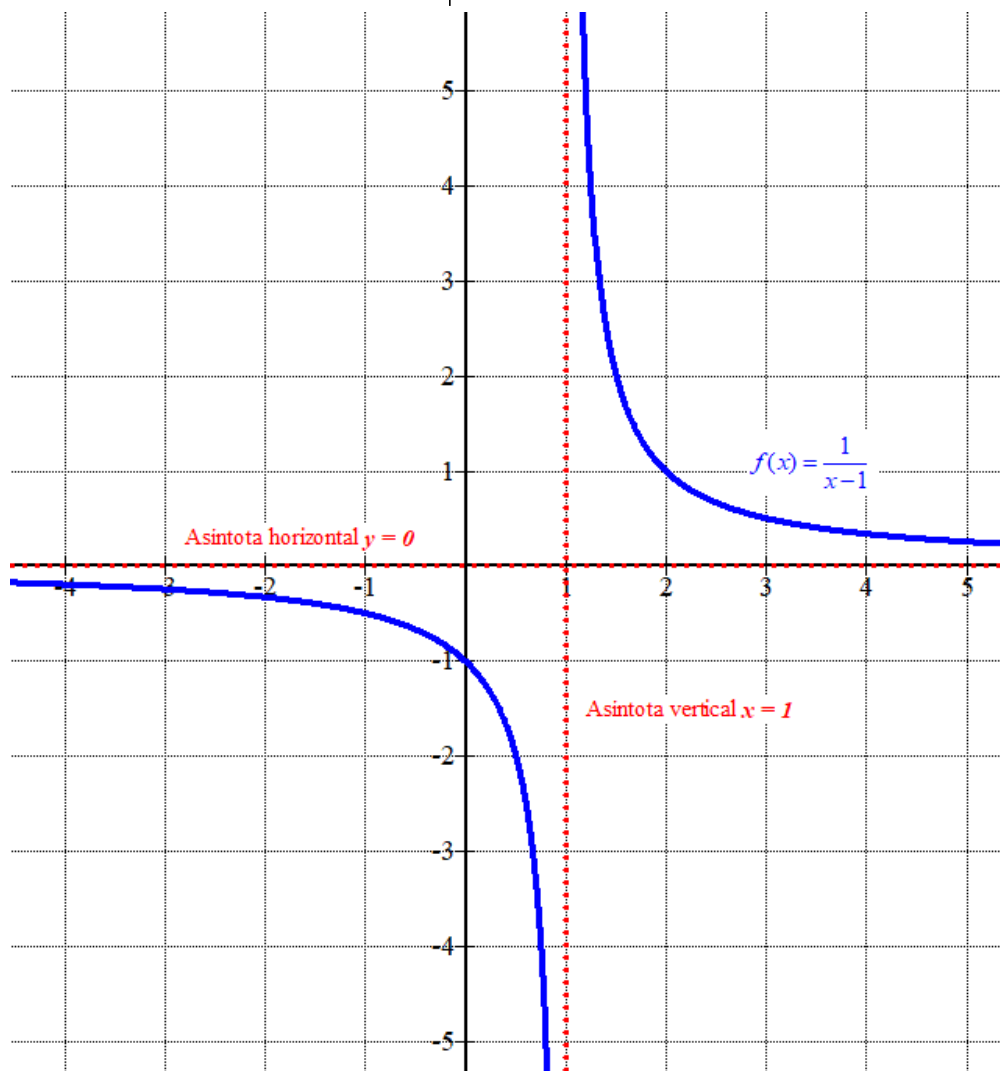
- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1 < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

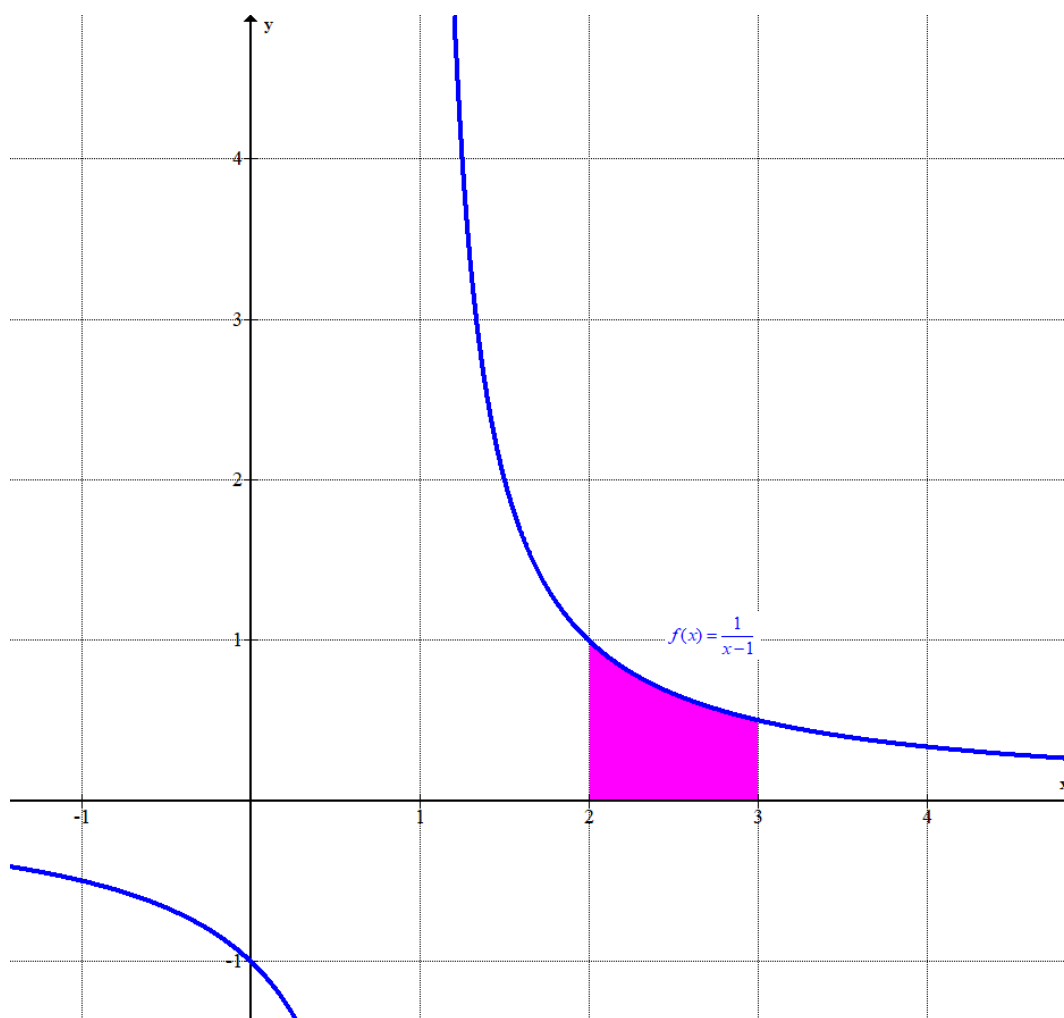
iii) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
-1	-0.5
0	-1
2	1
3	0.5



iv) El área de la región comprendida entre la función y el eje OX en el intervalo $[2, 3]$ es el valor de la integral definida de 2 a 3 de la función.

$$\text{Área} = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = [\ln(x-1)]_2^3 = \ln(3-1) - \ln(2-1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0.69 u^2$$



2.- Sea a un número real. Para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + az = 1 + 2a \\ ax + z = 1 \end{cases}$$

(i) (2 puntos) Discute su solución según los valores de a .

(ii) (1 punto) Determina, si es posible, todas las soluciones cuando $a = 2$.

(i) El sistema dado tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1+2a \\ a & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + 0 - 0 - 2 - 0 = a^2 - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $a = -1$

Para $a = -1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de eliminar la 3ª

fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

La matriz A/B tiene rango 3 pues el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna

tiene determinante distinto de 0 $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 2 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0$. El rango de A/B

es 3.

El rango de A/B (3) es distinto al rango de A (2). El sistema **no tiene solución**.

CASO 3. $a = 1$

Para $a = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale 0.

La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la

3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

El rango de la matriz A/B es el mismo que el de A pues la 4ª columna es la suma de la 1ª y la 2ª. El rango de A/B es 2.

Como rango de A (2) es igual al rango de A/B (2), pero menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene **infinitas soluciones**.

- (ii) Lo resolvemos para $a = 2$. Sabemos, por lo visto en el primer apartado que el sistema tiene una única solución.

El sistema queda $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x + y + 2z = 5 \\ z = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow 2x + 2 - x + 2(1 - 2x) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2 - x + 2 - 4x = 5 \Rightarrow -3x = 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

La solución es $x = \frac{-1}{3}$; $y = \frac{7}{3}$; $z = \frac{5}{3}$.

3.-**(i) (1.5 puntos)** Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos

$$(1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1).$$

(ii) (1.5 puntos) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular al plano del apartado (i).

(i) El plano que contiene a los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$ tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Hallamos la ecuación de este plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \in \pi \\ B(0,1,0) \in \pi \\ C(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-1+0+0+z+y-0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z-1=0}$$

(ii) La recta r perpendicular al plano $\pi: x+y+z-1=0$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n} = (1,1,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1,1,1) \\ P(1,1,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

PROPUESTA B:

1.- Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

- (i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
- (ii) **(1 punto)** Estudia su monotonía y sus extremos relativos o locales.
- (iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.
- (iv) **(1 punto)** Calcula el área de la región comprendida entre la función y el eje OX en el intervalo $[2, 3]$

Igual que el ejercicio 1 de propuesta A

2.- Sea a un número real. Para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + az = 1 + 2a \\ ax + z = 1 \end{cases}$$

- (i) **(2 puntos)** Discute su solución según los valores de a .
- (ii) **(1 punto)** Determina, si es posible, todas las soluciones cuando $a = 2$.

Igual que el ejercicio 2 de propuesta A

3.- Una empresa automovilística fabrica al año 1000 unidades de uno de sus modelos en dos factorías distintas ubicadas en Logroño y Pontevedra. El modelo lo fabrica en tres versiones: diesel, gasolina y eléctrico. En Logroño fabrica 650 unidades, de las cuales 300 son diesel y 100 eléctricos. En Pontevedra fabrica las otras 350 unidades, de las cuales 200 son de gasolina. El coche eléctrico no está muy demandado por lo que, en total, sólo fabrica 200 unidades al año.

- (i) (1.5 puntos) Si nos cruzamos por la calle con un coche de este modelo, ¿qué probabilidad hay de que sea de gasolina?
- (ii) (1.5 puntos) Suponiendo que sabemos que el coche que nos hemos cruzado es diesel, ¿qué probabilidad hay de que haya sido fabricado en Logroño?

En Logroño se fabrican 650 unidades, de las cuales 300 son diesel, 100 eléctricos y $650 - 300 - 100 = 250$ son gasolina.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Logroño	Pontevedra	
Diesel	300		
Gasolina	250	200	
Eléctrico	100		200
TOTALES	650	350	1000

Completamos la tabla.

	Logroño	Pontevedra	
Diesel	300	50	350
Gasolina	250	200	450
Eléctrico	100	100	200
TOTALES	650	350	1000

- a) Hay 1000 coches de este modelo y 450 son de gasolina. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un coche de este modelo sea de gasolina es $\frac{450}{1000} = 0.45$.
- b) Hay 350 coches diesel y 300 son fabricados en Logroño. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un coche diesel sea fabricado en Logroño vale $\frac{300}{350} = \frac{6}{7} \approx 0.8571$.