

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS AÑO 2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se calculará sobre las respuestas dadas a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Haciendo el inventario en una tienda se ha encontrado un cajón con cubiertos. En esa caja, el número de tenedores menos el número de cuchillos excede en 10 el doble del número de cucharas. Pero al doble del número de cuchillos le falta 30 para ser igual al doble del número de tenedores menos el triple del número de cucharas. La suma de cubiertos es igual a 50.

¿Cuántas cucharas y cuántos tenedores hay? ¿Cuál es el mayor número de juegos completos de cuchara, tenedor y cuchillo que podemos rehacer con el contenido de la caja?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

- (0,5 puntos) Determine la paridad de la función y su continuidad.
- (1 punto) Determine si la función es diferenciable en el dominio. Discútase si se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $(-2,2)$.
- (1 punto) Calcule el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = \sqrt{2}$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un dispositivo que emite un rayo láser está situado en el punto del espacio $P(1,2,4)$.

- (1,25 puntos) El dispositivo emite un rayo hacia el punto $O(2,3,0)$. Halle el punto en donde incide el rayo en el plano $\pi: x+2y+z=1$ así como el ángulo de incidencia.
- (1,25 puntos) El dispositivo se coloca ahora en otro punto P' de forma que O sea simétrico de P' respecto de π . Determine las coordenadas del punto P' .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De los sucesos A y B de cierto espacio muestral se sabe que $P(A) = \frac{7}{12}$, $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$ y

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{5}{12}.$$

- (1.5 puntos) Calcule $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? ¿Son A y B sucesos independientes?
- (1 punto) Si de otro suceso C se sabe que $P(A/C) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup C) = \frac{7}{8}$. Calcule $P(C)$.

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS AÑO 2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

OPCIÓN B**B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a+1 & -2 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

- a) (2 puntos) Discútase, según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) (0.5 puntos) Resuelva ese sistema para el caso $a = -\frac{1}{2}$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función definida en su dominio $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 2}, & x < 0 \\ \frac{x^3}{x^2 + 2}, & x \geq 0 \end{cases}$

- a) (1 punto) Determine el dominio de la función, así como su continuidad y diferenciabilidad.
b) (0,75 puntos) Determine las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de la función.
c) (0,75 puntos) Calcule el área de que determina la función con el eje X en el intervalo $[-1,0]$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran en el espacio los puntos $A(1,2,0)$ y $B(-2,2,4)$ así como la recta $r: (\lambda, \lambda, 1+\lambda)$.

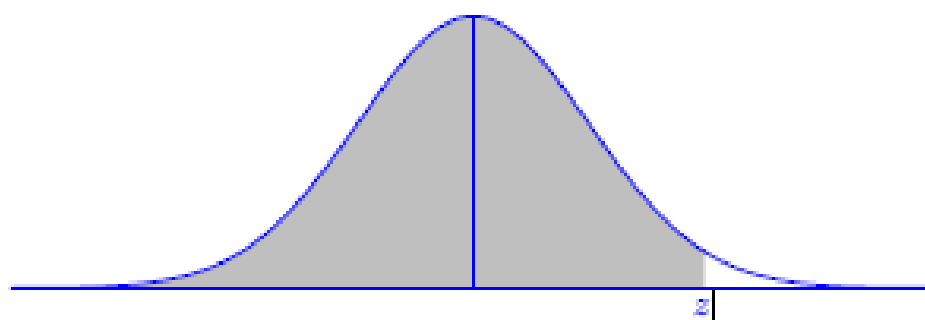
- a) (0,75 puntos) Determine la posición relativa de la recta r con la recta que pasa por A y B .
b) (0,75 puntos) Determine si hay algún punto C de la recta r que forme junto con A y B un triángulo equilátero.
c) (1 punto) Determine la ecuación de una recta s que corte perpendicularmente a r y que pase por A .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una nueva máquina hiladora fabrica madejas de lana. La longitud de la lana desenrollada de una madeja se distribuye como una normal de media 200m y desviación típica de 5m.

- a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que la lana desenrollada de una madeja extraída al azar esté entre 196m y 202m.
b) (1,25 puntos) Una madeja se considera inadmisibile si la longitud de su lana es inferior a 195m. Calcule la probabilidad de que entre 10 madejas extraídas al azar haya 2 o más madejas inadmisibles.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Haciendo el inventario en una tienda se ha encontrado un cajón con cubiertos. En esa caja, el número de tenedores menos el número de cuchillos excede en 10 el doble del número de cucharas. Pero al doble del número de cuchillos le falta 30 para ser igual al doble del número de tenedores menos el triple del número de cucharas. La suma de cubiertos es igual a 50.

¿Cuántas cucharas y cuántos tenedores hay? ¿Cuál es el mayor número de juegos completos de cuchara, tenedor y cuchillo que podemos rehacer con el contenido de la caja?

Llamamos “x” al número de cuchillos, “y” al número de tenedores y “z” al número de cucharas. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el problema.

- El número de tenedores menos el número de cuchillos excede en 10 el doble del número de cucharas $\rightarrow y - x = 2z + 10$.
- Al doble del número de cuchillos le falta 30 para ser igual al doble del número de tenedores menos el triple del número de cucharas $\rightarrow 2x + 30 = 2y - 3z$.
- La suma de cubiertos es igual a 50 $\rightarrow x + y + z = 50$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y - x = 2z + 10 \\ 2x + 30 = 2y - 3z \\ x + y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = x + 2z + 10 \\ 2x + 30 = 2y - 3z \\ x + y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 30 = 2(x + 2z + 10) - 3z \\ x + x + 2z + 10 + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cancel{2x} + 30 = \cancel{2x} + 4z + 20 - 3z \\ 2x + 3z = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{10 = z} \\ 2x + 3z = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 30 = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 5} \Rightarrow \boxed{y = 5 + 2 \cdot 10 + 10 = 35}$$

En el cajón de los cubiertos hay 5 cuchillos, 35 tenedores y 10 cucharas.

El número más pequeño es el de cuchillos (5). Sólo se pueden hacer 5 juegos completos de cuchara, tenedor y cuchillo.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

- a) (0,5 puntos) Determine la paridad de la función y su continuidad.
 b) (1 punto) Determine si la función es diferenciable en el dominio. Discútase si se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $(-2,2)$.
 c) (1 punto) Calcule el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = \sqrt{2}$.

a) Estudiamos la paridad de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2} \\ f(1) &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \sqrt{1-(-2)} = \sqrt{3} \\ f(2) &= \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

Como $f(-x) = f(x)$ la función es par.

Para $x < 0$ la función tiene la expresión $f(x) = \sqrt{1-x}$ que es continua pues el radicando es siempre positivo.

Para $x > 0$ la función tiene la expresión $f(x) = \sqrt{x+1}$ que es continua pues el radicando es siempre positivo.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $\mathbb{R}$.

- b) La función es diferenciable en $\mathbb{R} - \{0\}$, siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, & x > 0 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-0}} = \frac{-1}{2} \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{2} = f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$.

El teorema de Rolle establece que si una función es continua en un intervalo cerrado y **diferenciable en el intervalo abierto**, y los valores de la función en los extremos son iguales, entonces la derivada de la función se anula en al menos un punto del intervalo.

No podemos aplicar el teorema de Rolle a nuestra función en el intervalo $[-2, 2]$ pues la función no es derivable en $x = 0 \in (-2, 2)$.

c) Obtenemos los puntos de corte entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = \sqrt{2}$.

$$f(x) = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \rightarrow 1-x = 2 \rightarrow \boxed{-1=x} \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{2} \rightarrow x+1 = 2 \rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos de corte y el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = \sqrt{2}$ es el valor de la integral definida entre -1 y 1 de la diferencia de las dos funciones. Por el cambio de definición en $x = 0$ calculamos esta integral como la suma de dos integrales definidas: una entre -1 y 0 , y la otra entre 0 y 1 .

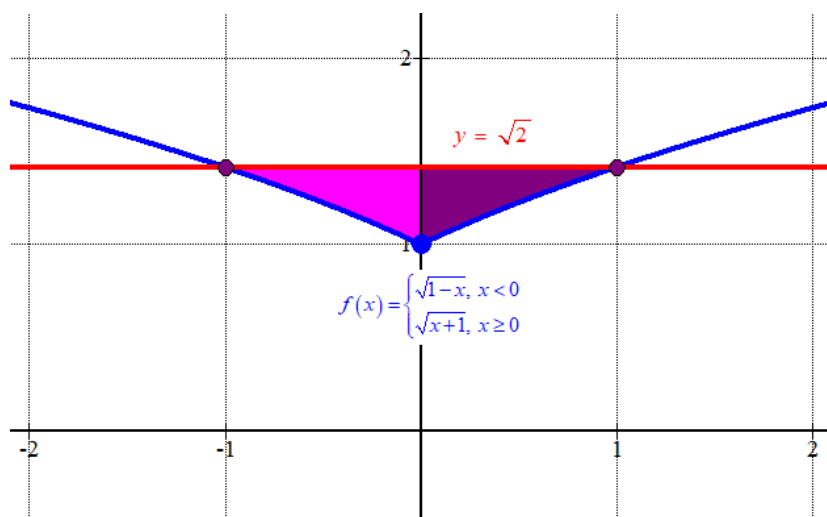
$$\int_{-1}^0 \sqrt{2} - \sqrt{1-x} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{2} - (1-x)^{1/2} dx = \left[\sqrt{2}x - \frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{-1} (1-x)^{1/2+1} \right]_{-1}^0 = \left[\sqrt{2}x - \frac{2\sqrt{(1-x)^3}}{3} \right]_{-1}^0$$

$$= \sqrt{2} \cdot 0 - \frac{2\sqrt{(1-0)^3}}{3} - \left(\sqrt{2}(-1) - \frac{2\sqrt{(1-(-1))^3}}{3} \right) = \frac{2}{3} + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{8}}{3} \approx 0.195 \text{ u}^2$$

$$\int_0^1 \sqrt{2} - \sqrt{x+1} dx = \int_0^1 \sqrt{2} - (x+1)^{1/2} dx = \left[\sqrt{2}x - \frac{1}{3/2} (x+1)^{1/2+1} \right]_0^1 = \left[\sqrt{2}x - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} \right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} \cdot 1 - \frac{2\sqrt{(1+1)^3}}{3} - \left(\sqrt{2} \cdot 0 - \frac{2\sqrt{(1+0)^3}}{3} \right) = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{8}}{3} + \frac{2}{3} \approx 0.195 \text{ u}^2$$

El área de la región acotada comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = \sqrt{2}$ es la suma de los dos valores obtenidos: $0.195 + 0.195 = 0.39$ unidades cuadradas.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un dispositivo que emite un rayo láser está situado en el punto del espacio $P(1,2,4)$.

- a) (1,25 puntos) El dispositivo emite un rayo hacia el punto $O(2,3,0)$. Halle el punto en donde incide el rayo en el plano $\pi: x+2y+z=1$ así como el ángulo de incidencia.
- b) (1,25 puntos) El dispositivo se coloca ahora en otro punto P' de forma que O sea simétrico de P' respecto de π . Determine las coordenadas del punto P' .

a) Hallamos la ecuación de la recta r que une los puntos P y O .

$$\left. \begin{array}{l} P(1,2,4) \in r \\ O(2,3,0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(1,2,4) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{OP} = (1,2,4) - (2,3,0) = (-1,-1,4) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 4 + 4\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de la recta obtenida (laser) y el plano $\pi: x+2y+z=1$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+2y+z=1 \\ r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 4 + 4\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \lambda + 2(2 - \lambda) + 4 + 4\lambda = 1 \Rightarrow 1 - \lambda + 4 - 2\lambda + 4 + 4\lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -8 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - (-8) = 9 \\ y = 2 - (-8) = 10 \\ z = 4 + 4(-8) = -28 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(9,10,-28)}$$

El punto de incidencia es $A(9,10,-28)$.

Hallamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el director de la recta.

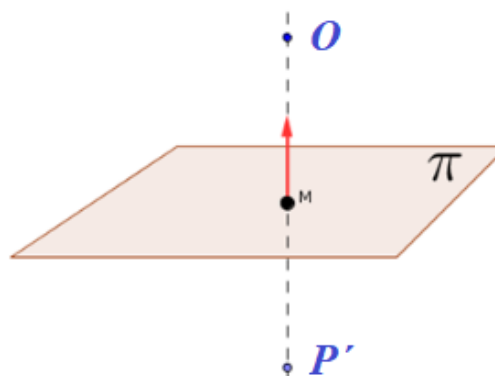
$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+2y+z=1 \\ r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 4 + 4\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1,2,1) \\ \vec{v}_r = (-1,-1,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} =$$

$$= \frac{(1,2,1)(-1,-1,4)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2} \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{-1-2+4}{\sqrt{6}\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{3}}{18} \Rightarrow \boxed{(\vec{n}, \vec{v}_r) \approx 84.48^\circ}$$

El ángulo formado entre recta y plano es $90^\circ - 84.48^\circ = 5.52^\circ$.

- b) Nos piden hallar el punto P' simétrico de O respecto del plano $\pi: x+2y+z=1$.

Para obtener el punto P' determinamos la recta que pasa por O y es perpendicular al plano. Luego determinamos el punto M de corte de recta y plano y por último hallamos P' sumando a M el vector $\overrightarrow{OM}$.



Hallo la ecuación de la recta. Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi : x + 2y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} O(2, 3, 0) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto de corte de la recta s y el plano (lo llamamos M) resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + z - 1 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -7 \Rightarrow \lambda = \frac{-7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6} \\ y = 3 + 2\frac{-7}{6} = \frac{4}{6} \\ z = \frac{-7}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{-7}{6}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico P' las hallamos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{OM}$.

$$\left. \begin{array}{l} M\left(\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{-7}{6}\right) \\ O(2, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{-7}{6}\right) - (2, 3, 0) = \left(\frac{-7}{6}, \frac{-14}{6}, \frac{-7}{6}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{OM} = \left(\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{-7}{6}\right) + \left(\frac{-7}{6}, \frac{-14}{6}, \frac{-7}{6}\right) = \left(\frac{-2}{6}, \frac{-10}{6}, \frac{-14}{6}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-7}{3}\right)$$

El punto simétrico de O respecto del plano π es $P'\left(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-7}{3}\right)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De los sucesos A y B de cierto espacio muestral se sabe que $P(A) = \frac{7}{12}$, $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$ y

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{5}{12}.$$

- a) (1.5 puntos) Calcule $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? ¿Son A y B sucesos independientes?
- b) (1 punto) Si de otro suceso C se sabe que $P(A/C) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup C) = \frac{7}{8}$. Calcule $P(C)$.

Tenemos que $P(A) = \frac{7}{12}$, $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ y $P(\bar{A} \cap B) = \frac{5}{12}$.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener el resto de valores que nos dan las probabilidades.

	A	$\bar{A}$	
B		5	
$\bar{B}$	4		
	7		12

Completamos la tabla.

	A	$\bar{A}$	
B	3	5	8
$\bar{B}$	4	0	4
	7	5	12

- a) Observando la tabla tenemos que $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$.

Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} + \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

¿Son A y B sucesos incompatibles?

Para ello su intersección debe ser vacía y debe ser $P(A \cap B) = 0$. Pero $P(A \cap B) = 0.25 \neq 0$.

Los sucesos no son incompatibles.

¿Son A y B sucesos independientes?

$$¿P(A \cap B) = P(A)P(B)? \Rightarrow ¿\frac{3}{12} = \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{12}?$$

Como no son iguales los sucesos A y B no son independientes.

- b) Usamos el teorema de Bayes y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A/C) = \frac{1}{4} \\ P(A \cup C) = \frac{7}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{4} \\ P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{7}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4P(A \cap C) = P(C) \\ \frac{7}{12} + P(C) - P(A \cap C) = \frac{7}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{12} + 4P(A \cap C) - P(A \cap C) = \frac{7}{8} \Rightarrow 3P(A \cap C) = \frac{7}{8} - \frac{7}{12} = \frac{7}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap C) = \frac{7/24}{3} = \frac{7}{72} \Rightarrow \boxed{P(C) = 4 \frac{7}{72} = \frac{7}{18}}$$

OPCIÓN B

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a+1 & -2 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) Discútase, según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) (0.5 puntos) Resuelva ese sistema para el caso $a = -\frac{1}{2}$.

a) El sistema dado tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a+1 & -2 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 3 \\ -1 & a+1 & -2 & 2a \\ 1 & a & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a+1 & -2 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 2a(a+1) - \cancel{2} + 0 - 0 + \cancel{2} + 2a^2 = 2a^2 + 2a + 2a^2 = 4a^2 + 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4a^2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a(2a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a+1 = 0 \rightarrow 2a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -\frac{1}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $a = 0$

Para $a = 0$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de eliminar la

3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$

El menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna (proporcional a la 3ª) tiene

$$\text{determinante distinto de } 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4 \neq 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es } 3.$$

El rango de A/B (3) es distinto al rango de A (2). El sistema **no tiene solución**.

CASO 3. $a = -\frac{1}{2}$

$$\text{Para } a = -\frac{1}{2} \text{ las matrices quedan } A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1/2 & -2 & -1 \\ 1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale 0.

La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar

$$\text{la 3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo } \rightarrow \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \neq 0$$

Observamos que la 3ª fila es proporcional a la 2ª fila. El rango de A/B es 2

Como rango de A (2) es igual al rango de A/B (2), pero menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene **infinitas soluciones**.

b) Lo resolvemos para $a = -\frac{1}{2}$. Sabemos, por lo visto en el primer apartado que el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\text{El sistema queda } \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 3 \\ -x + \frac{1}{2}y - 2z = -1 \\ x - \frac{1}{2}y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 6 \\ -2x + y - 4z = -2 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ -2x + y - 4z = -2 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 6 = x \\ -2x + y - 4z = -2 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(2y - 6) + y - 4z = -2 \\ 2(2y - 6) - y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4y + 12 + y - 4z = -2 \\ 4y - 12 - y + 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y - 4z = -14 \\ 3y + 4z = 14 \end{cases} \Rightarrow 3y + 4z = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z = 14 - 3y \Rightarrow z = \frac{14}{4} - \frac{3}{4}y \Rightarrow \begin{cases} x = -6 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3.5 - 0.75\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Las soluciones son } \begin{cases} x = -6 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3.5 - 0.75\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función definida en su dominio $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-2}, & x < 0 \\ \frac{x^3}{x^2+2}, & x \geq 0 \end{cases}$

- a) (1 punto) Determine el dominio de la función, así como su continuidad y diferenciabilidad.
 b) (0,75 puntos) Determine las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de la función.
 c) (0,75 puntos) Calcule el área que determina la función con el eje X en el intervalo $[-1,0]$.

a) El denominador de la función se anula para $x = -\sqrt{2}$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}\}$.

Estudiamos la continuidad de la función en cada intervalo de definición.

La función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$ que es una función fraccionaria cuyo denominador se anula para $x = -\sqrt{2}$. Es continua en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, 0)$.

La función en el intervalo $(0, +\infty)$ es $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$ que es una función fraccionaria cuyo denominador no se anula. La función es continua en $(0, +\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

- Existe $f(0) = \frac{0^3}{0^2+2} = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2-2} = \frac{0}{0^2-2} = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x^2+2} = \frac{0^3}{0^2+2} = 0$
- Los tres valores son iguales: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

La función es continua en $x = 0$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}\}$.

Estudiamos la derivabilidad.

La función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$, su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-2) - x(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{x^2-2-2x^2}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2}{(x^2-2)^2}.$$

La función en el intervalo $(0, +\infty)$ es $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$. Es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2) - x^3(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2-2x^4}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2}{(x^2+2)^2}$$

Estudiamos si es derivable en $x = 0$ comprobando si sus derivadas laterales son iguales:

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 2}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-1}{2} \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = \frac{-1}{2} \neq 0 = f'(0^+).$$

Al tener valores distintos las derivadas laterales en $x = 0$ la función no es derivable en $x = 0$

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, -\sqrt{2}\}$.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -\sqrt{2}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2} = \frac{-\sqrt{2}}{2 - 2} = \infty$$

$x = -\sqrt{2}$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene como asíntota horizontal $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no tiene oblicua.

Cuando x tiende a $+\infty$ estudiamos si tiene asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

La función tiene una asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$: $y = x$.

c) En el intervalo $[-1, 0]$ la función es $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$. Averiguamos si la función corta el eje OX.

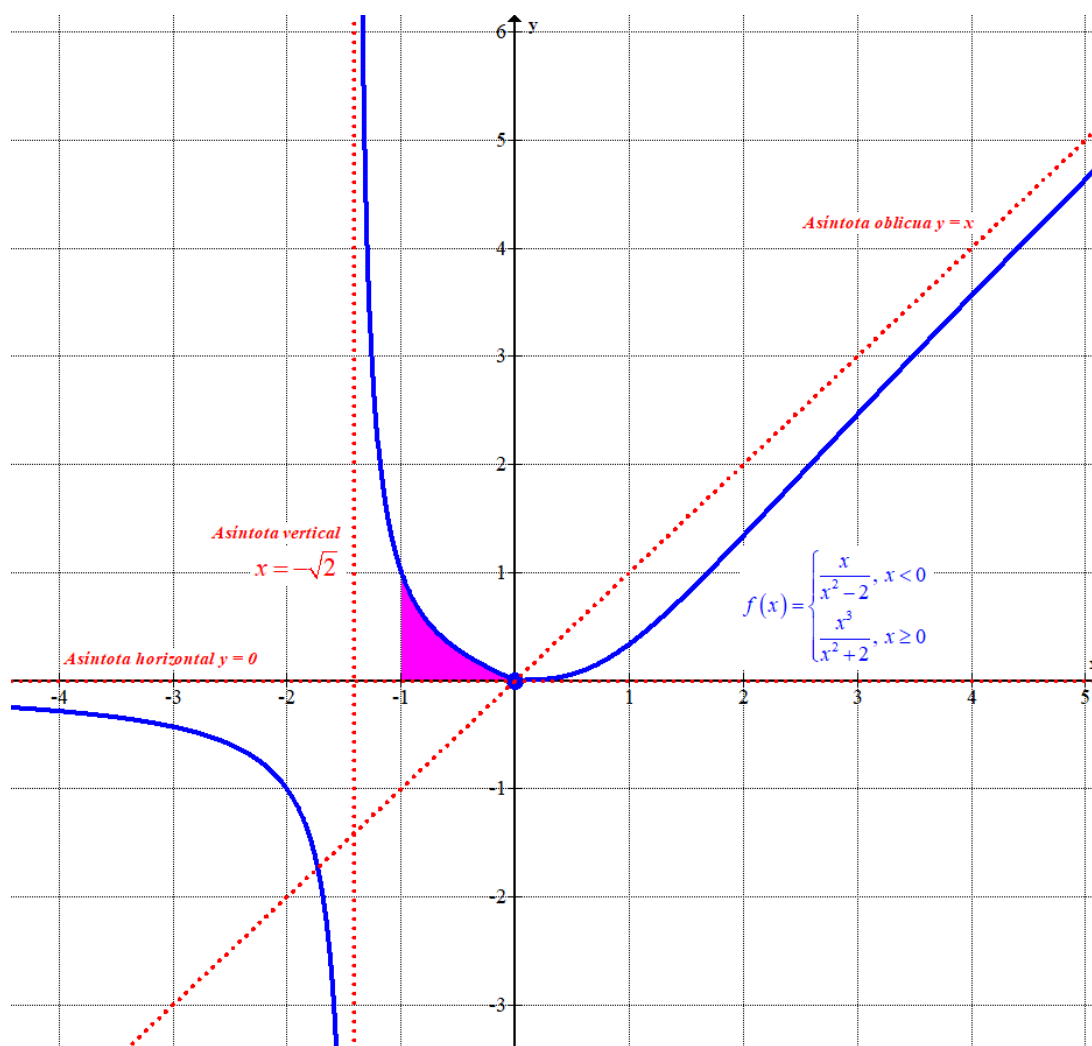
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Para el cálculo del área de la región comprendida entre la función y el eje OX en el intervalo $[-1, 0]$ calculamos la integral definida de la función entre -1 y 0 .

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2-2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2-2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2-2| \right]_{-1}^0 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |0^2-2| - \frac{1}{2} \ln |(-1)^2-2| = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \boxed{\frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.34 \text{ u}^2}$$

El área de la región que determina la función con el eje X en el intervalo $[-1,0]$ tiene un valor de $\frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.34$ unidades cuadradas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran en el espacio los puntos $A(1,2,0)$ y $B(-2,2,4)$ así como la recta $r:(\lambda, \lambda, 1+\lambda)$.

- a) (0,75 puntos) Determine la posición relativa de la recta r con la recta que pasa por A y B .
 b) (0,75 puntos) Determine si hay algún punto C de la recta r que forme junto con A y B un triángulo equilátero.
 c) (1 punto) Determine la ecuación de una recta s que corte perpendicularmente a r y que pase por A .

a) Determinamos la ecuación de la recta t que pasa por A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,2,0) \in t \\ B(-2,2,4) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1,2,0) \in t \\ \vec{v}_t = \overrightarrow{AB} = (-2,2,4) - (1,2,0) = (-3,0,4) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 2 \\ z = 4\alpha \end{cases}$$

El vector director de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ z = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ es $\vec{u}_r = (1,1,1)$ y el de la recta t es $\vec{v}_t = (-3,0,4)$.

Estos vectores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = (-3,0,4) \\ \vec{u}_r = (1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-3}{1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{4}{1}$$

Averiguamos el valor nulo o no del producto mixto $[\vec{v}_t, \vec{u}_r, \overrightarrow{AP_r}]$.

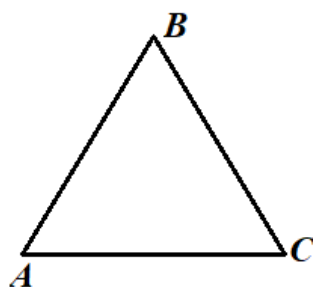
$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ z = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow P_r(0,0,1) \quad \left. \begin{array}{l} P_r(0,0,1) \\ A(1,2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP_r} = (0,0,1) - (1,2,0) = (-1,-2,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = (-3,0,4) \\ \vec{u}_r = (1,1,1) \\ \overrightarrow{AP_r} = (-1,-2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_t, \vec{u}_r, \overrightarrow{AP_r}] = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 8 + 4 - 0 - 6 = -13 \neq 0$$

Al ser distinto de cero el producto mixto sabemos que las rectas se cruzan.

- b) Un punto C de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ z = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ tiene coordenadas $C(\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$.

Para que el triángulo ABC sea equilátero deben tener todos los lados del triángulo la misma longitud: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$.



$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ B(-2, 2, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 2, 4) - (1, 2, 0) = (-3, 0, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 0) \\ C(\lambda, \lambda, 1+\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (\lambda, \lambda, 1+\lambda) - (1, 2, 0) = (\lambda-1, \lambda-2, 1+\lambda)$$

$$\left. \begin{array}{l} C(\lambda, \lambda, 1+\lambda) \\ B(-2, 2, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (\lambda, \lambda, 1+\lambda) - (-2, 2, 4) = (\lambda+2, \lambda-2, \lambda-3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (\lambda-2)^2 + (1+\lambda)^2} = \sqrt{(\lambda+2)^2 + (\lambda-2)^2 + (\lambda-3)^2} \Rightarrow$$

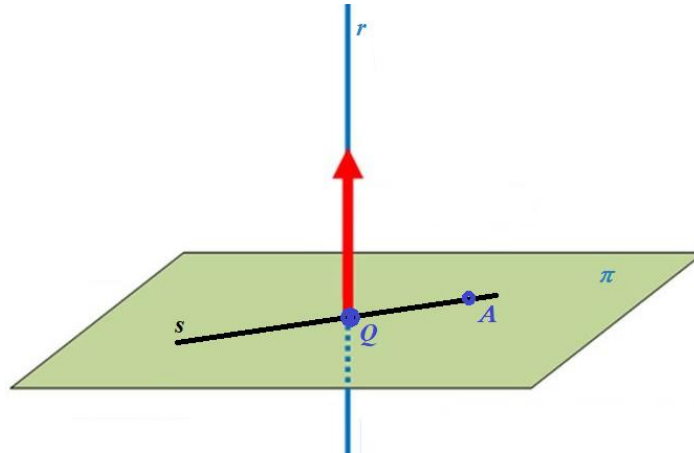
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 = \sqrt{\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 4\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda} \\ 5 = \sqrt{\lambda^2 + 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 9 - 6\lambda} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 = \sqrt{3\lambda^2 - 4\lambda + 6} \\ 5 = \sqrt{3\lambda^2 - 6\lambda + 17} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 25 = 3\lambda^2 - 4\lambda + 6 \\ 25 = 3\lambda^2 - 6\lambda + 17 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 3\lambda^2 - 4\lambda - 19 \rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-19)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{244}}{6} \\ 0 = 3\lambda^2 - 6\lambda - 8 \rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-8)}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{132}}{6} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{244}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4 + \sqrt{244}}{6} = \frac{2 + \sqrt{61}}{3} \\ \frac{4 - \sqrt{244}}{6} = \frac{2 - \sqrt{61}}{3} \end{array} \right. \\ \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{132}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{6 + \sqrt{132}}{6} = \frac{3 + \sqrt{33}}{3} \\ \frac{6 - \sqrt{132}}{6} = \frac{3 - \sqrt{33}}{3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

No existe ningún valor de λ que haga cumplir las dos igualdades, por lo que no existe ningún punto C de la recta r que haga que el triángulo ABC sea equilátero.

- c) Hallamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por A. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + y + z + D = 0 \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + z - 3 = 0}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta r y el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + z - 3 = 0 \\ r : \begin{cases} x = \lambda \\ z = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \lambda + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)}$$

La recta s que buscamos es la recta que pasa por los puntos A y Q.

$$\left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \in s \\ A(1, 2, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{QA} = (1, 2, 0) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right) \rightarrow \vec{w}_s = 3 \cdot \overrightarrow{QA} = (1, 4, -5) \\ A(1, 2, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 + 4\beta; \beta \in \mathbb{R} \\ z = -5\beta \end{cases}$$

La ecuación de la recta s que corte perpendicularmente a r y que pasa por A es

$$s : \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 + 4\beta; \beta \in \mathbb{R} \\ z = -5\beta \end{cases}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una nueva máquina hiladora fabrica madejas de lana. La longitud de la lana desenrollada de una madeja se distribuye como una normal de media 200m y desviación típica de 5m.

- a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que la lana desenrollada de una madeja extraída al azar esté entre 196m y 202m.
- b) (1,25 puntos) Una madeja se considera inadmisibles si la longitud de su lana es inferior a 195m. Calcule la probabilidad de que entre 10 madejas extraídas al azar haya 2 o más madejas inadmisibles.

Llamamos X = La longitud de la lana desenrollada de una madeja. $X = N(200,5)$

- a) Nos piden calcular $P(196 \leq X \leq 202)$.

$$\begin{aligned}
 P(196 \leq X \leq 202) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{196 - 200}{5} \leq Z \leq \frac{202 - 200}{5}\right) = \\
 &= P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) = \\
 &= P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.6554 - [1 - 0.7881] = \boxed{0.4435}
 \end{aligned}$$

- b) Calculamos la probabilidad de que una madeja sea inadmisibles, es decir $P(X < 195)$.

$$\begin{aligned}
 P(X < 195) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{195 - 200}{5}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}
 \end{aligned}$$

Consideramos la variable binomial Y = Número de madejas inadmisibles de un grupo de 10. Sabemos que $n = 10$ y $p = 0.1587$. $Y = B(10, 0.1587)$.

Nos piden calcular $P(Y \geq 2)$. Lo calculamos.

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq 2) &= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] = 1 - \left[\binom{10}{0} 0.1587^0 \cdot 0.8413^{10} + \binom{10}{1} 0.1587^1 \cdot 0.8413^9 \right] = \\
 &= 1 - [0.8413^{10} + 10 \cdot 0.1587 \cdot 0.8413^9] \approx \boxed{0.4873}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que entre 10 madejas extraídas al azar haya 2 o más madejas inadmisibles tiene un valor aproximado de 0.4873.