

Pruebas de Acceso a la Universidad. Mayores de 25 años
Unibertsitatean sartzeko probak 25 hurtes gorakoentzat



CURSO / IKASTURTEA: 2023-2024

ASIGNATURA/ IRAKASGAIA: Matemáticas/ Matematika

Responde a dos opciones de las cuatro que se presentan.

Opción A

A1) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula el determinante de AB .

(5 puntos)

A2) Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las curvas $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

(5 puntos)

Opción B

B1) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1, 1, 0)$ y contiene a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

(5 puntos)

B2) Calcula el máximo relativo, el mínimo relativo y el punto de inflexión de la curva $f(x) = x^3 - 3x$.

(5 puntos)

Opción C

C1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + ay + z = 5 \\ -(a+2)y + az = 2 \end{cases}$$

(5 puntos)

C2) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^3 + 5x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n} \right)^{n-7}$$

(5 puntos)

Opción D

D1) Halla el punto de la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

que equidista de los puntos $P \equiv (3, 1, 1)$ y $Q \equiv (1, -1, 1)$

(5 puntos)

D2) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$y = e^{\cos(x^2-1)}$$

$$y = \frac{\ln(x+3)}{\operatorname{sen}(x-1)}$$

(5 puntos)

SOLUCIONES**Opción A**

A1) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula el determinante de AB .

(5 puntos)

Obtenemos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2+0 & -2-2+0 & 2-5+0 \\ 0-4+0 & -1-4+2 & 1-10-3 \\ 0+0+0 & -4+0+0 & 4+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -4 & -3 & -12 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor del determinante de la matriz AB .

$$|AB| = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -3 \\ -4 & -3 & -12 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 0 - 48 - 0 - 64 + 96 = 8$$

A2) Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las curvas $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

(5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas curvas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

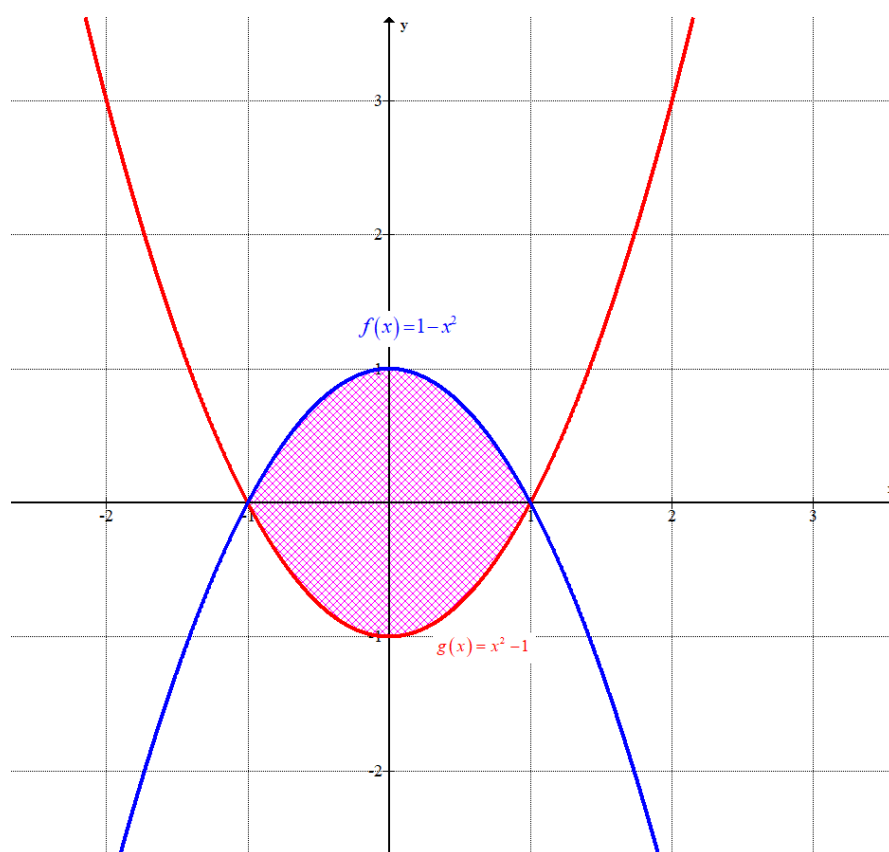
En el intervalo $[-1, 1]$ tomamos $x = 0$ y se cumple $\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 - 0^2 = 1 \\ g(0) = 0^2 - 1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) > g(0)$. En este intervalo se cumple que $f(x) \geq g(x)$.

El área de la región del plano encerrada por las gráficas de las curvas $f(x)$ y $g(x)$ es el valor de la integral definida de -1 a 1 de $f(x) - g(x)$.

$$f(x) - g(x) = 1 - x^2 - (x^2 - 1) = -2x^2 + 2$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^1 -2x^2 + 2 dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left[\frac{-2 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right] - \left[\frac{-2(-1)^3}{3} + 2(-1) \right] = \frac{-2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \approx 2.667 \text{ u}^2$$



Opción B

B1) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1,1,0)$ y contiene a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

(5 puntos)

Hallamos un punto y un vector director de la recta.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} B(1,-1,3) \in \text{recta} \\ \vec{v} = (2,-1,2) \end{cases}$$

El plano que pasa por el punto $P \equiv (1,1,0)$ y contiene a la recta tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}$ y el vector que une el punto P con cualquier punto de la recta $\overrightarrow{PB}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,1,0) \in \pi \\ \overrightarrow{PB} = (1,-1,3) - (1,1,0) = (0,-2,3) \\ \vec{v} = (2,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1) + 6(y-1) + 0 + 4z - 0 + 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 4 + 6y - 6 + 4z + 3x - 3 = 0 \Rightarrow -x + 6y + 4z - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - 6y - 4z + 5 = 0}$$

B2) Calcula el máximo relativo, el mínimo relativo y el punto de inflexión de la curva $f(x) = x^3 - 3x$.
(5 puntos)

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \rightarrow \text{Es máximo} \\ f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \rightarrow \text{Es mínimo} \end{cases}$$

Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ y $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 2)$ y el mínimo relativo es $(1, -2)$.

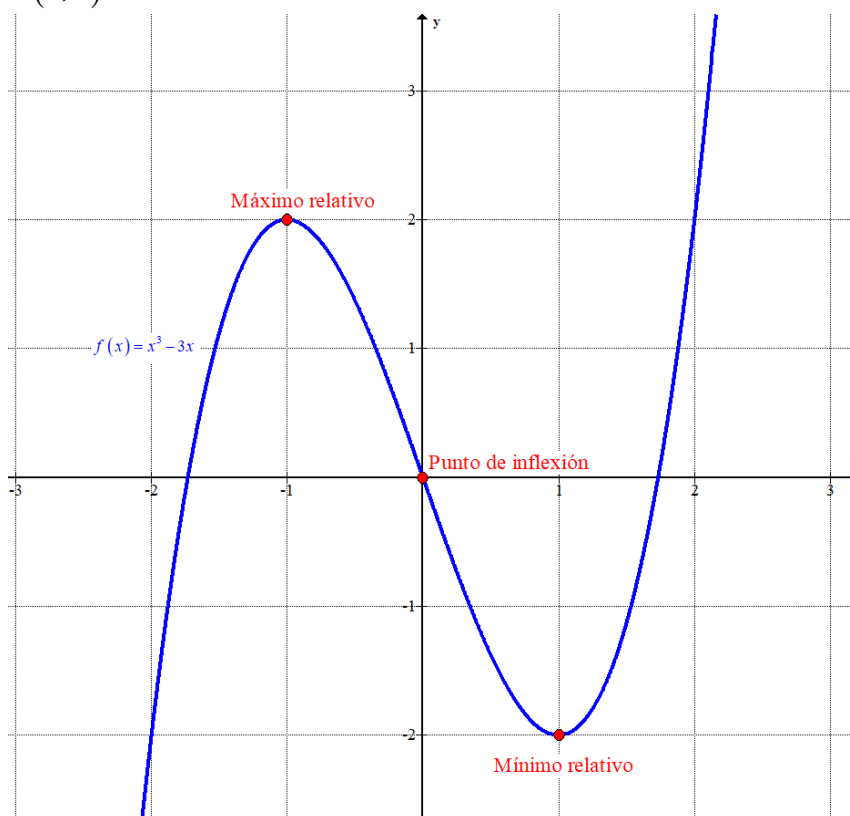
Para obtener el punto de inflexión utilizamos la segunda derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6x \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Comprobamos si la derivada tercera es no nula en este valor.

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) = 6 \neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = 0$. Como $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$ el punto de inflexión tiene coordenadas $(0, 0)$.



Opción C

C1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + ay + z = 5 \\ -(a+2)y + az = 2 \end{cases}$$

(5 puntos)

Este sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & -a-2 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 & 5 \\ 0 & -a-2 & a & 2 \end{pmatrix}$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & -a-2 & a \end{vmatrix} = a^2 + 0 + 2(-a-2) - 0 + 2a + a + 2 = a^2 - 2a - 4 + 2a + a + 2 = a^2 + a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = a \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = a \end{cases}$$

Analizamos por separado tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + ay + z = 5 \\ -(a+2)y + az = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z + 2 \\ 2x + ay + z = 5 \\ -(a+2)y + az = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(y - z + 2) + ay + z = 5 \\ -(a+2)y + az = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - 2z + 4 + ay + z = 5 \\ -(a+2)y + az = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+2)y - z = 1 \rightarrow (a+2)y = z + 1 \\ -(a+2)y + az = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(z+1) + az = 2 \Rightarrow -z - 1 + az = 2 \Rightarrow (a-1)z = 3 \Rightarrow \{a-1 \neq 0\}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{a-1}} \Rightarrow (a+2)y = \frac{3}{a-1} + 1 \Rightarrow (a+2)y = \frac{3+a-1}{a-1} \Rightarrow (a+2)y = \frac{a+2}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{a+2}{(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow x = \frac{1}{a-1} - \frac{3}{a-1} + 2 = \frac{1-3+2a-2}{a-1} = \frac{2a-4}{a-1}$$

Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$ la solución del sistema es $x = \frac{2a-4}{a-1}$, $y = \frac{1}{a-1}$, $z = \frac{3}{a-1}$.

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad 3 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 3. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad 1 \quad 5 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B también es 2, son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido con el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ \boxed{z = -1} \end{cases} \Rightarrow x - y - 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 + y \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $a = -2$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$

C2) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^3 + 5x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n} \right)^{n-7}$$

(5 puntos)

Calculamos el primer límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^3 + 5x} &= \frac{0^2 \operatorname{sen} 0}{0^3 + 5 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x}{3x^2 + 5} = \\ &= \frac{2 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0 + 0^2 \cos 0}{3 \cdot 0^2 + 5} = \frac{0}{5} = \boxed{0} \end{aligned}$$

Calculamos el segundo límite.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n} \right)^{n-7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{5}{n} \right)^{n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} \right)^{n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}} \right)^{n-7} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}} \right)^{\frac{n}{5} \cdot \frac{5}{n} (n-7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}} \right)^{\frac{n}{5}} \right]^{\frac{5n-35}{n}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-35}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n} - \frac{35}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \frac{35}{n}} = e^{5 - \frac{35}{\infty}} = e^5 \end{aligned}$$

Opción D

Dl) Halla el punto de la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

que equidista de los puntos $P \equiv (3,1,1)$ y $Q \equiv (1,-1,1)$

(5 puntos)

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, -1, 2) \\ A(1, 1, 3) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Las coordenadas de un punto cualquiera de la recta es $B(1+2\lambda, 1-\lambda, 3+2\lambda)$.Para que el punto B de la recta r equidiste de los puntos P y Q debe ser $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{QB}|$.

$$\left. \begin{array}{l} P(3,1,1) \\ Q(1,-1,1) \\ B(1+2\lambda, 1-\lambda, 3+2\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PB} = (1+2\lambda, 1-\lambda, 3+2\lambda) - (3,1,1) = (2\lambda-2, -\lambda, 2+2\lambda) \\ \overrightarrow{QB} = (1+2\lambda, 1-\lambda, 3+2\lambda) - (1,-1,1) = (2\lambda, 2-\lambda, 2+2\lambda) \end{cases}$$

$$|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{QB}| \Rightarrow \sqrt{(2\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2 + (2+2\lambda)^2} = \sqrt{(2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (2+2\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2 + \cancel{(2+2\lambda)^2} = (2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + \cancel{(2+2\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{4\lambda^2} + \cancel{4} - 8\lambda + \cancel{\lambda^2} = \cancel{4\lambda^2} + \cancel{4} + \cancel{\lambda^2} - 4\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{B(1,1,3)}$$

El punto B de la recta que equidista de los puntos P y Q es B(1,1,3).

D2) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$y = e^{\cos(x^2-1)}$$

$$y = \frac{\ln(x+3)}{\operatorname{sen}(x-1)}$$

(5 puntos)

Para el cálculo de la primera derivada aplicamos la regla de la cadena.

$$y' = e^{\cos(x^2-1)} \cdot (-\operatorname{sen}(x^2-1)) \cdot 2x = -2x \operatorname{sen}(x^2-1) e^{\cos(x^2-1)}$$

Para el cálculo de la segunda derivada aplicamos la regla de derivación de un cociente.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{1}{x+3} \operatorname{sen}(x-1) - \cos(x-1) \ln(x+3)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x+3) \operatorname{sen}^2(x-1)} - \frac{\cos(x-1) \ln(x+3)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \\ &= \frac{1}{(x+3) \operatorname{sen}(x-1)} - \frac{\cos(x-1) \ln(x+3)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} \end{aligned}$$