

Pruebas de Acceso para Mayores de 25 años	Convocatoria: 2024	 SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO
Asignatura: MATEMÁTICAS		 GENERALITAT VALENCIANA Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

OBSERVACIONES: SE RESOLVERÁN SÓLO TRES PROBLEMAS. TODOS LOS PROBLEMAS DESARROLLADOS SE EVALUARÁN DE 0 A 10 PUNTOS, EN FUNCIÓN DEL PLANTEAMIENTO, INTERPRETACIÓN, RESOLUCIÓN, DISCUSIÓN, EXPOSICIÓN Y PRESENTACIÓN. LA CALIFICACIÓN FINAL SE OBTENDRÁ DIVIDIENDO ENTRE 3 LA SUMA DE LAS PUNTUACIONES OBTENIDAS.

SE PERMITE LA UTILIZACIÓN DE CUALQUIER TIPO DE CALCULADORA, PROHIBIENDO EL ALMACENAMIENTO EN LA MEMORIA DE INFORMACIÓN SOBRE LOS TEMAS.

PROBLEMA 1. (Se calificará de 0 a 10 puntos) Resolved razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -4 \\ 2x - y + z = 7 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 2. Resolved razonadamente los dos apartados siguientes:

- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** Obtened la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.
- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** Calculad la distancia del punto $(1, -2)$ a la recta de ecuación $x + 6y + 16 = 0$.

PROBLEMA 3. Resolved razonadamente los dos apartados siguientes:

- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** Obtened $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$.
- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** Calcular la derivada primera de la función $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

PROBLEMA 4. Resolved razonadamente los dos apartados siguientes:

- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** Calculad $\int (9 - x^2) dx$.
- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** Hallad el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x) = 9 - x^2$ y el eje de abscisas.

PROBLEMA 5. Se sabe que un jugador de tenis gana 6 de cada siete partidos. Calculad razonadamente las probabilidades siguientes:

- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** De que gane tres partidos seguidos.
- (Se calificará de 0 a 5 puntos)** De que si juega dos partidos seguidos gane al menos uno.

Soluciones

PROBLEMA 1. (Se calificará de 0 a 10 puntos) Resolved razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -4 \\ 2x - y + z = 7 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Utilizamos el método de sustitución.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -4 \\ 2x - y + z = 7 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = -4 \\ 2x - y + z = 7 \\ x = 3y + 2z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3y + 2z + 1) + 2y - z = -4 \\ 2(3y + 2z + 1) - y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9y + 6z + 3 + 2y - z = -4 \\ 6y + 4z + 2 - y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11y + 5z = -7 \\ 5y + 5z = 5 \rightarrow y + z = 1 \rightarrow y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11(1 - z) + 5z = -7 \Rightarrow 11 - 11z + 5z = -7 \Rightarrow -6z = -18 \Rightarrow \boxed{z = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1 - 3 = -2} \Rightarrow \boxed{x = 3(-2) + 2 \cdot 3 + 1 = 1}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = -2$ y $z = 3$.

PROBLEMA 2. Resolved razonadamente los dos apartados siguientes:

- a) **(Se calificará de 0 a 5 puntos)** Obtened la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.
- b) **(Se calificará de 0 a 5 puntos)** Calculad la distancia del punto $(1, -2)$ a la recta de ecuación $x + 6y + 16 = 0$.

- a) Hallamos el vector director de la recta r que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$.

$$\vec{v} = (4, 1) - (-2, 2) = (6, -1)$$

La recta s que queremos hallar es paralela a la recta r por lo que tendrá como vector director

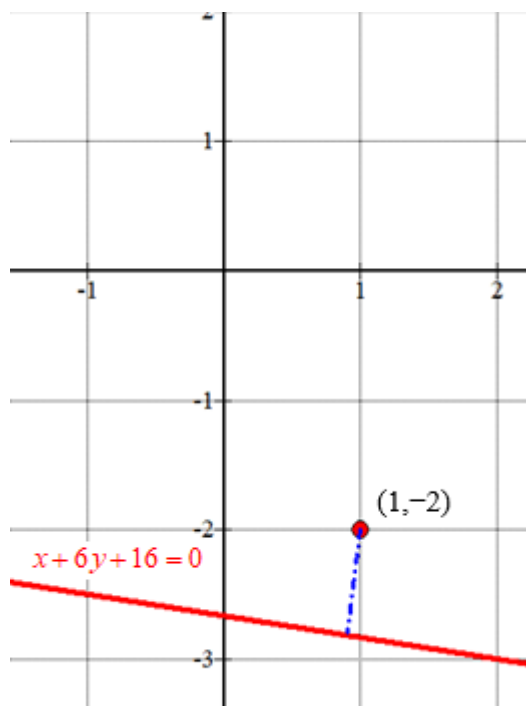
$\vec{v} = (6, -1)$ y su pendiente será $-\frac{1}{6}$.

$$\left. \begin{array}{l} (2, -3) \in s \\ m_s = -\frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow s: y + 3 = -\frac{1}{6}(x - 2) \Rightarrow 6y + 18 = -x + 2 \Rightarrow \boxed{s: x + 6y + 16 = 0}$$

La recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 2)$ tiene ecuación $x + 6y + 16 = 0$.

- b) Utilizamos la fórmula de la distancia de punto a recta en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2) \\ s: x + 6y + 16 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|1 + 6 \cdot (-2) + 16|}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = \frac{5}{\sqrt{37}} \approx 0.82 \text{ unidades}$$



PROBLEMA 3. Resolved razonadamente los dos apartados siguientes:

a) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Obtened $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$.

b) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Calcular la derivada primera de la función $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1}{(-1)^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \dots$$

Para resolver la indeterminación obtenida factorizamos los polinomios del numerador y el denominador de la fracción.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$x^2 - 4 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Lo aplicamos al cálculo del límite.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x+1)}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{(-1)^2 - 1 + 1}{-1 - 1} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

b) Aplicamos la regla de derivación de un cociente para el cálculo de la derivada de la función.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(1 - \sin x) - (1 + \sin x)(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \\ &= \frac{\cos x - \cancel{\cos x \sin x} + \cos x + \cancel{\cos x \sin x}}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2} \end{aligned}$$

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$.

PROBLEMA 4. Resolved razonadamente los dos apartados siguientes:

a) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Calculad $\int (9 - x^2) dx$.

b) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Hallad el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x) = 9 - x^2$ y el eje de abscisas.

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int (9 - x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} + K$$

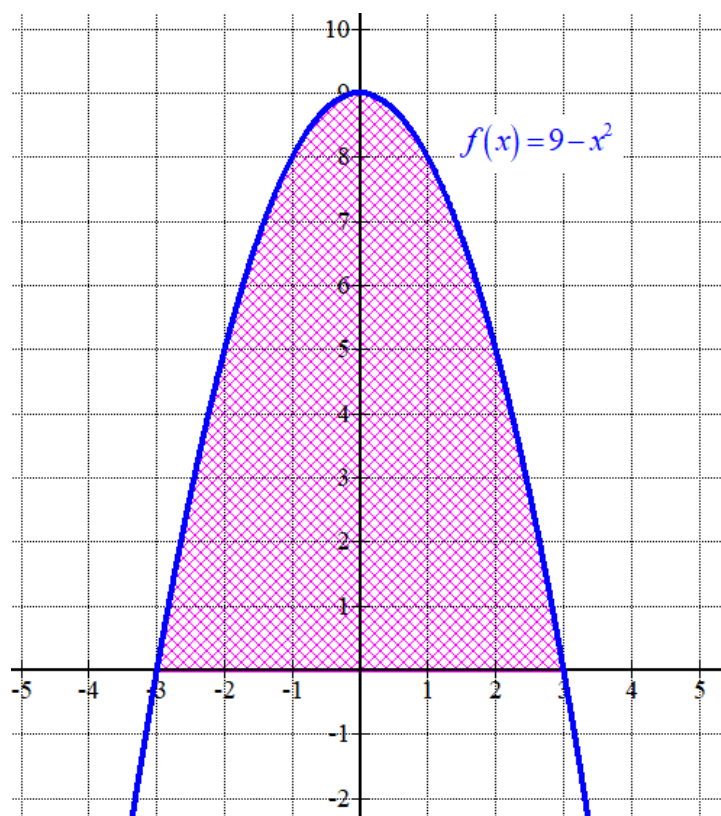
b) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 9 - x^2 \\ \text{Eje abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

La gráfica de la función corta el eje de abscisas en $x = -3$ y $x = 3$.

Como la función es positiva ($f(0) = 9 > 0$) en el intervalo $(-3, 3)$ el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x) = 9 - x^2$ y el eje de abscisas es el valor de la integral definida de la función de -3 a 3 .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^3 = \\ &= \left[9 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right] - \left[9(-3) - \frac{(-3)^2}{2} \right] = 27 - \frac{9}{2} + 27 + \frac{9}{2} = \boxed{54 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



PROBLEMA 5. Se sabe que un jugador de tenis gana 6 de cada siete partidos. Calculad razonadamente las probabilidades siguientes:

- a) **(Se calificará de 0 a 5 puntos)** De que gane tres partidos seguidos.
b) **(Se calificará de 0 a 5 puntos)** De que si juega dos partidos seguidos gane al menos uno.

- a) Si llamamos G_1 , G_2 y G_3 a los sucesos ganar el primer, el segundo y el tercer partido, tenemos que $P(G_1) = P(G_2) = P(G_3) = \frac{6}{7}$.

La probabilidad de que gane tres partidos seguidos es el producto de las probabilidades de ganar el partido 1, el 2 y el 3 $\rightarrow P(G_1)P(G_2)P(G_3) = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{216}{343} \approx 0.6297$

- b) El suceso “gane al menos uno de los dos partidos seguidos que juega” es el suceso contrario de “perder los dos partidos seguidos que juega”. Calculamos la probabilidad del suceso contrario que es el producto de la probabilidad de perder el partido 1 y el partido 2 $\rightarrow$

$$P(\overline{G_1})P(\overline{G_2}) = (1 - P(G_1)) \cdot (1 - P(G_2)) = \left(1 - \frac{6}{7}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{7}\right) = \frac{1}{49}.$$

La probabilidad de que gane al menos uno de los dos partidos seguidos que juega es $1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49} \approx 0.9796$.