

1. Dada a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$$

a)

Calcule o valor de k para que A non teña inversa. Nese caso o determinante de A ten que ser 0

$$\det A = k - 6 - 24 + 3 + 12 - 4k = -3k - 15 \Rightarrow -3k - 15 = 0 \Rightarrow k = -5$$

Polo tanto A non ten inversa se $k = -5$

b)

Se $k = -5$, $\det A = 0 \Rightarrow \text{rango } A \leq 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$.

c)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^t$$

Para $k = -2$, tenemos que $\det A = -3k - 15 = -9$

$$A^* = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Polo tanto, a inversa da matriz A é a seguinte:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^t = \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Sexan X ="Metros comprados ao distribuidor A" e Y ="Metros comprados ao distribuidor B"

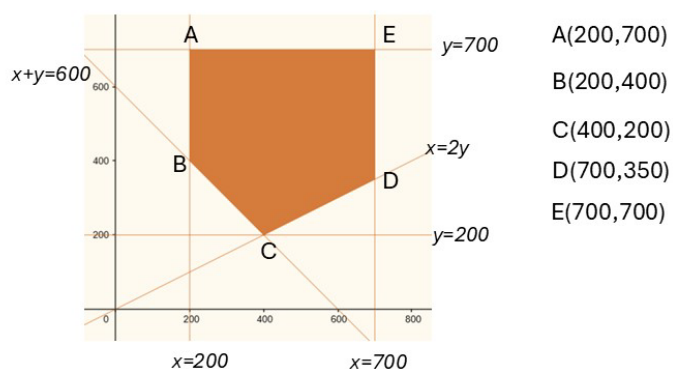
a)

O problema é $f(x, y) = \text{Min } 2x + 3y$ suxeito ás seguintes restricións

$$x \geq 200 \quad y \geq 200 \quad x \leq 700 \quad y \leq 700 \quad x + y \geq 600 \quad x \leq 2y$$

b)

A rexión factible e os vértices son os seguintes:



A rexión factible determinada polas restricións ten coma vértices A, B, C, D e E

$$A: \begin{cases} x = 200 \\ y = 700 \end{cases} A(200, 700) \quad B: \begin{cases} x = 200 \\ x + y = 600 \end{cases} B(200, 400) \quad C: \begin{cases} y = 200 \\ x = 2y \end{cases} C(400, 200)$$

$$D: \begin{cases} x = 700 \\ x = 2y \end{cases} D(700, 350) \quad E: \begin{cases} x = 700 \\ y = 700 \end{cases} E(700, 700)$$

b)

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

$$f(A) = 2500 \quad f(B) = 1600 \quad f(C) = 1400 \rightarrow \text{Mínimo} \quad f(D) = 2450 \quad f(E) = 3500$$

A función f acada o seu mínimo no vértice C(400,200). Para obter o mínimo custo debe comprar 400 metros ao distribuidor A e 200 metros ao distribuidor B.

3.

Temos a función $f(x) = ax^2 + bx + c$, que pasa pola orixe de coordenadas e ten un máximo en $P(4, 16)$.

a)

Sabendo que $f(x)$ pasa por $(4,16)$, por $(0,0)$ e ten un máximo $(4,16)$, temos entón que $f(0) = 0$, $f(4) = 16$ e $f'(4) = 0$

Coma

$$f(0) = c \Rightarrow c = 0$$

$$f(4) = 16a + 4b \Rightarrow 16a + 4b = 16$$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(4) = 8a + b \Rightarrow 8a + b = 0 \Rightarrow b = -8a$$

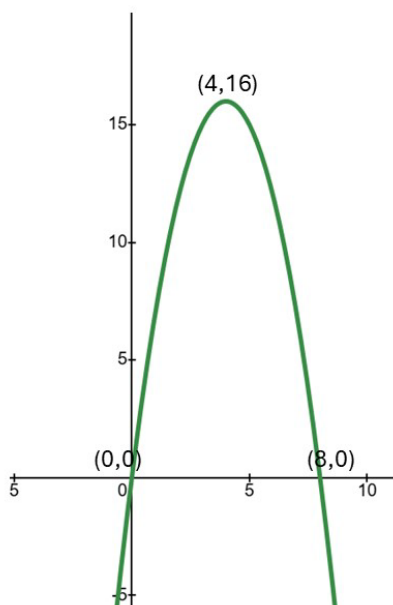
$$\text{Polo que } 16a + 4b = 16a - 32a = -16a = 16 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 8$$

Temos entón que $a = -1$, $b = 8$ e $c = 0$, polo que $f(x) = -x^2 + 8x$.

b)

A función $f(x) = -x^2 + 8x$ ten un máximo en $(4,16)$

$$f(x) = -x^2 + 8x = 0 \quad \text{Entón coma } -x^2 + 8x = x(8 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$



Entón a área da rexión limitada pola función e o eixe OX é:

$$\int_0^8 f(x) dx = \int_0^8 (-x^2 + 8x) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 \right) \Big|_0^8 = -\frac{8^3}{3} + 4 \times 8^2 = \mathbf{85,33u^2}$$

4.

Temos a seguinte función

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \leq x \leq 30.$$

a)

Sábase que a produción de x unidades supón un custo fixo de 80 euros máis un custo variable de 11,25 euros por unidade.

Función de coste:

$$f(x) = 80 + 11,25x$$

Función de ingresos:

$$g(x) = \left(-\frac{x^2}{20} + x + 55\right)x = -\frac{x^3}{20} + x^2 + 55x$$

Función de beneficios:

$$B(x) = g(x) - f(x) = \left(-\frac{x^3}{20} + x^2 + 55x\right) - (80 + 11,25x) = -\frac{x^3}{20} + x^2 + 43,75x - 80$$

b)

Para calcular o beneficio máximo

$$B'(x) = -\frac{3x^2}{20} + 2x + 43,75$$

Para que $B'(x) = 0$, teríamos o seguinte:

$$x = \frac{-2 \mp \sqrt{4 + \frac{12}{20} \times 43,75}}{-\frac{6}{20}} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -\frac{70}{6} \end{cases} \Rightarrow x = 25, \text{ xa que non pode ser negativo}$$

O beneficio nese caso sería igual a:

$$B(25) = -\frac{25^3}{20} + 25^2 + 43,75 \times 25 - 80 = 857,5$$

O prezo por unidade de produto sería igual a:

$$P(25) = -\frac{25^2}{20} + 25 + 55 = 48,75$$

5.

Se denotamos por A ="Escoitar música" e B ="Ler", temos que $P(A \cup B) = 0,8$, $P(A \cap B) = 0,25$ e $P(\bar{B}) = 0,6$

a)

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,75 - 0,35 = 0,4.$$

Para calcular $P(A)$ empregamos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,8 = P(A) + 0,4 - 0,35 \Rightarrow P(A) = 0,75$$

b)

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,35 = 0,05.$$

c)

$$P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap \bar{B}) = 0,4 + 0,05 = 0,45.$$

d)

$$\begin{cases} P(A \cap B) = 0,35 \\ P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,75 = 0,3 \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

Entón os sucesos A e B non son independentes.

(Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa).

6. $X = \text{"Lonxitude"}$.

$$X \rightarrow N(\mu, 6)$$

a)

O intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para μ ven dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Coma $\bar{x} = 244$, $n = 9$ e $1 - \alpha = 0,98$, temos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33$

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(244 - 2,33 \frac{6}{\sqrt{9}}, 244 + 2,33 \frac{6}{\sqrt{9}} \right) = (239,34; 248,66)_{98\%}$$

b)

Pídese calcular $P(\bar{X} < 242)$

Coma $\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ temos que $\bar{X} \rightarrow N(244; 1,5)$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 242) &= P\left(Z < \frac{242 - 244}{1,5}\right) = P(Z < -1,33) = \\ &= 1 - P(Z > -1,33) = 1 - P(Z < 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918. \end{aligned}$$