

1. $X \cdot A + B = A \cdot B^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule A^{-1} y rango B

$$\det A = -1 \quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 0 \Rightarrow \text{rango } B \neq 3 \quad \text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } B = 2$$

b) $X \cdot A + B = A \cdot B^t \Rightarrow X \cdot A = A \cdot B^t - B \Rightarrow X = (AB^t - B)A^{-1}$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB^t - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

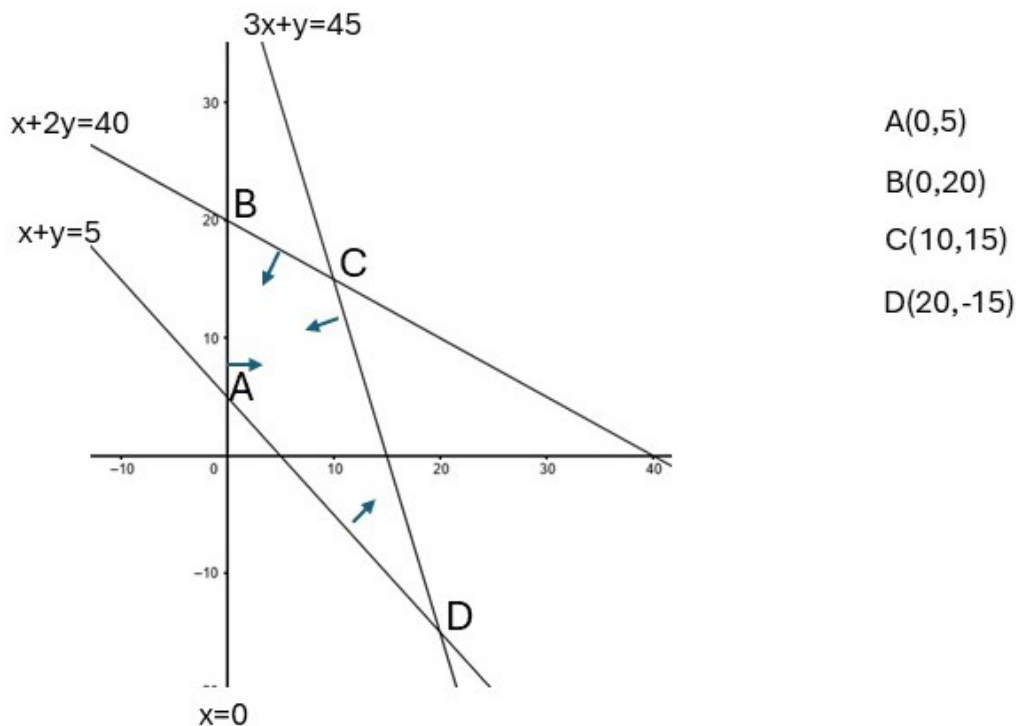
$$(AB^t - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz **X** pedida é a seguinte:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

a) Restricións: $x + 2y \leq 40$ $x + y \geq 5$ $3x + y \leq 45$ $x \geq 0$



A rexión factible determinada polas restricións ten coma vértices A, B, C e D

$$A: \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} A(0,5) \quad B: \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 40 \end{cases} B(0,20)$$

$$C: \begin{cases} 3x + y = 45 \\ x + 2y = 40 \end{cases} C(10,15) \quad D: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + y = 45 \end{cases} D(20,-15)$$

b)

$$f(x, y) = 2x - 3y$$

$$f(A) = -15$$

$$f(B) = -60 \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$f(C) = -25$$

$$f(D) = 85 \rightarrow \text{Máximo}$$

f acada o seu máximo no vértice D(20,-15)

f acada o seu mínimo no vértice B(0,20)

3.

Temos a seguinte función

$$N(t) = \begin{cases} 28 - (t - 4)^2, & 0 \leq t < 6 \\ (t - 10)^2 + 8, & 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

a)

Determinación dos períodos de crecemento e decrecemento.

En $(0,6)$, $N(t) = 28 - (t - 4)^2$ polo tanto $N'(t) = -2(t - 4)$ co que $N'(t) = 0$ se $t = 4$ co que $t = 4$ sería un punto crítico.

Coma en $(0,4)$ $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ é crecente.

Coma en $(4,6)$ $N'(t) < 0 \Rightarrow N$ é decrecente. A función tería un máximo relativo en $t = 4$, $N(4) = 28$.

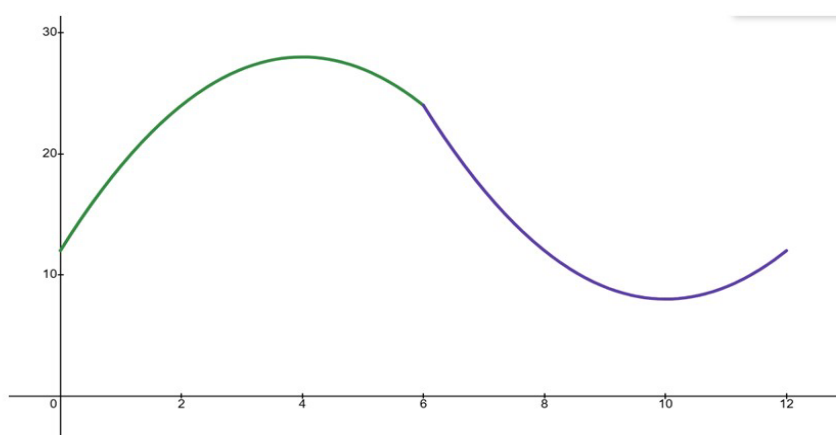
En $(6,12)$, $N(t) = (t - 10)^2 + 8$ polo tanto $N'(t) = 2(t - 10)$ co que $N'(t) = 0$ se $t = 10$ co que $t = 10$ sería un punto crítico.

Coma en $(6,10)$ $N'(t) < 0 \Rightarrow N$ é decrecente.

Coma en $(10,12)$ $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ é crecente. A función tería un mínimo relativo en $t = 10$, $N(10) = 8$.

O número de vehículos vendidos crece dende o inicio do ano ata transcorridos 4 meses ($t = 4$), logo decrece ata transcorridos 10 meses ($t = 10$) e finalmente crece dende transcorridos 10 meses ata finalizar o ano. O maior número de vehículos vendidos foi 28 (transcorridos 4 meses). O menor número de vehículos vendidos foi 8 (transcorridos 10 meses).

b) Coa información anterior e tendo en conta que $N(0) = 12$ e $N(12) = 12$



c) Para que $N(t) < 12$

En $(0,6)$, $N(t) = 28 - (t - 4)^2 < 12 \Rightarrow 16 < (t - 4)^2 \Rightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t > 8 \end{cases} \Rightarrow N(t) > 12$ en $(0,6)$

En $(6,12)$, $N(t) = (t - 10)^2 + 8 < 12 \Rightarrow (t - 10)^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} t > 8 \\ t < 12 \end{cases} \Rightarrow N(t) < 12$ si $8 < t < 12$

O número de vehículos vendido foi inferior a 8 unidades no período que vai dende transcorridos 8 meses ata rematar o ano.

4.

Dada a función

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$$

onde a, b, c son números reais.

a)

Sabendo que $f(x)$ pasa por $(2,8)$ e que ten un extremo relativo en $(0,16)$, temos entón que $f(2) = 8, f(0) = 16$ e $f'(0) = 0$

$$\text{Coma } f'(x) = 3ax^2 - 4x + b \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

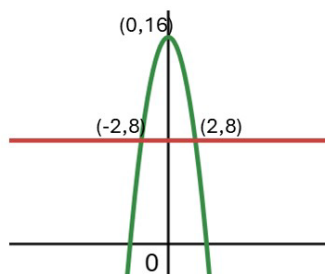
$$f(0) = 16 \Rightarrow c = 16.$$

$$f(2) = 8a - 8 + 16 = 8 \Rightarrow 8a + 8 = 8 \Rightarrow a = 0.$$

Temos entón que $a = b = 0$ e $c = 16$.

b)

$$f(x) = -2x^2 + 16 \quad \text{e} \quad y = 8 \Rightarrow -2x^2 + 16 = 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$



b)

Entón a área da rexión limitada pola función e a recta é igual a:

$$\int_{-2}^2 (-2x^2 + 16 - 8) dx = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right) \Big|_{-2}^2 = -\frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} + 16 = \frac{64}{3}$$

5.

Se denotamos por O ="Obesidade" e H ="Hipertensión", temos que $P(O) = 0,2$, $P(O \cap H) = 0,11$ e $P(O|H) = 0,275$

a)

$P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H) = 0,2 + 0,4 - 0,11 = 0,49$, polo que a porcentaxe pedida sería o 49%

Para calcular $P(H)$ empregamos que

$$P(O|H) = \frac{P(O \cap H)}{P(H)} \Rightarrow P(H) = \frac{P(O \cap H)}{P(O|H)} = \frac{0,11}{0,275} = 0,4.$$

b)

Coma $P(O \cap H) = 0,11$ e $P(O) \times P(H) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$. Entón $P(O \cap H) \neq P(O) \times P(H)$ polo que os sucesos O e H non son independentes.

c)

$$P(H|\bar{O}) = \frac{P(H \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(H) - P(H \cap O)}{1 - P(O)} = \frac{0,4 - 0,11}{1 - 0,2} = 0,3625.$$

(Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa).

6. $X = \text{"Tempo de formación"}$.

$$X \rightarrow N(\mu, 15)$$

a)

O intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para μ ven dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Coma $\bar{x} = 97$, $n = 25$ e $1 - \alpha = 0,95$, temos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(97 - 1,96 \frac{15}{\sqrt{25}}, 97 + 1,96 \frac{15}{\sqrt{25}} \right) = (91,12; 102,88)_{95\%}$$

b)

Pídese calcular $P(90 < \bar{X} < 104)$

Coma $\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ temos que $\bar{X} \rightarrow N(97; 2,5)$

$$\begin{aligned} P(90 < \bar{X} < 104) &= P\left(\frac{90 - 97}{2,5} < Z < \frac{104 - 97}{2,5}\right) = P(-2,8 < Z < 2,8) = \\ &= P(Z < 2,8) - P(Z < -2,8) = P(Z < 2,8) - (1 - P(Z > -2,8)) = \\ &= P(Z < 2,8) - (1 - P(Z < 2,8)) = 0,9974 - (1 - 0,9974) = 0,9948. \end{aligned}$$