



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad para mayores de 25
Curso 2024-2025
ASIGNATURA: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias
Sociales

Resuelve tres de los cuatro problemas planteados.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Problema 1. (5+5 puntos)

En una famosa bodega Riojana se quiere comercializar dos nuevos Cavas: Cava Brut Nature y Cava Extra Brut. La bodega quiere conocer si es más rentable producir Cava Brut Nature o Extra Brut y en qué medida puede optimizar el proceso de producción, teniendo en cuenta la facturación y las limitaciones de producción.

En cuanto a la producción, la capacidad de producción de estos dos productos es de 20000 botellas y no puede producir más de 12000 botellas de Cava Brut Nature y 18000 de Extra Brut.

Por otra parte, cada botella de Cava Brut Nature le proporciona unos ingresos de 20 euros y cada botella de Cava Extra Brut le proporciona unos ingresos de 25 euros.

1.1 Representa la región factible.

1.2 ¿Cuántas botellas de cada tipo se tiene que producir para obtener unos ingresos máximos?
¿Cuál es el valor de estos ingresos?

Problema 2. (3+4+3 puntos)

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

2.1 Indica su dominio, calcula sus cortes con los ejes y sus límites en el infinito.

2.2 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcula máximos y mínimos relativos.

2.3 Con la información anterior, representa gráficamente la función f .

Problema 3. (3+4+3 puntos)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

3.1 Clasifica el sistema dado.

3.1 Utiliza el método de Gauss para calcular todas las soluciones.

3.2 Encuentra una solución que cumpla $y = -10$.

Problema 4. (5+5 puntos)

Un 20 % de los estudiantes de una universidad no utiliza el transporte público para ir a clase. Un 80 % de los que sí utilizan, también hace uso del comedor universitario.

Se conoce también que el 95 % de los estudiantes hacen uso del transporte público o uso del comedor. Halla la probabilidad de que, seleccionado al azar un estudiante de esa universidad

4.1 resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario.

4.2 resulte ser usuario del comedor universitario.

SOLUCIONES

Problema 1. (5+5 puntos)

En una famosa bodega Riojana se quiere comercializar dos nuevos Cavas: Cava Brut Nature y Cava Extra Brut. La bodega quiere conocer si es más rentable producir Cava Brut Nature o Extra Brut y en qué medida puede optimizar el proceso de producción, teniendo en cuenta la facturación y las limitaciones de producción.

En cuanto a la producción, la capacidad de producción de estos dos productos es de 20000 botellas y no puede producir más de 12000 botellas de Cava Brut Nature y 18000 de Extra Brut.

Por otra parte, cada botella de Cava Brut Nature le proporciona unos ingresos de 20 euros y cada botella de Cava Extra Brut le proporciona unos ingresos de 25 euros.

1.1 Representa la región factible.

1.2 ¿Cuántas botellas de cada tipo se tiene que producir para obtener unos ingresos máximos?. ¿Cuál es el valor de estos ingresos?

1.1 Llamamos “x” al número de miles de botellas de Cava Brut Nature producidos e “y” al número de miles de botellas de Cava Extra Brut.

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones dadas en el enunciado del problema.

La capacidad de producción de estos dos productos es de 20000 botellas $\rightarrow x + y \leq 20$

No puede producir más de 12000 botellas de Cava Brut Nature y 18000 de Extra Brut $\rightarrow x \leq 12; y \leq 18$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

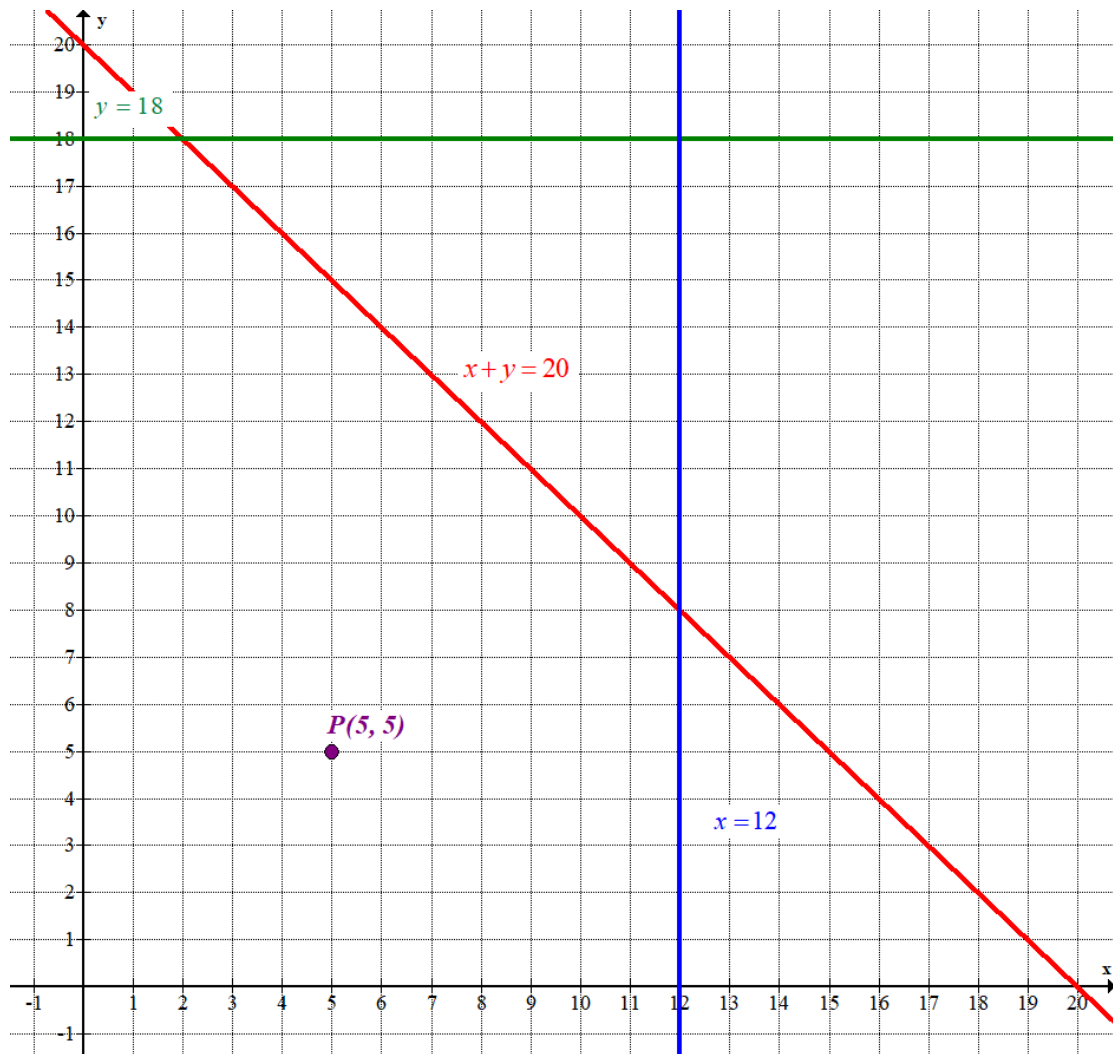
Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 20 \\ x \leq 12; y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Por otra parte, cada botella de Cava Brut Nature le proporciona unos ingresos de 20 euros y cada botella de Cava Extra Brut le proporciona unos ingresos de 25 euros lo que significa que la función objetivo que deseamos maximizar los ingresos tiene la expresión $I(x, y) = 20x + 25y$, viniendo estos ingresos expresados en miles de euros.

Representamos la región factible empezando por dibujar las rectas que delimitan dicha región.

x	$x + y = 20$	$x = 12$	y	x	$y = 18$	$x \geq 0; y \geq 0$
0	20	12	8	2	18	Primer
2	18	12	18	12	18	cuadrante
12	8					
20	0					



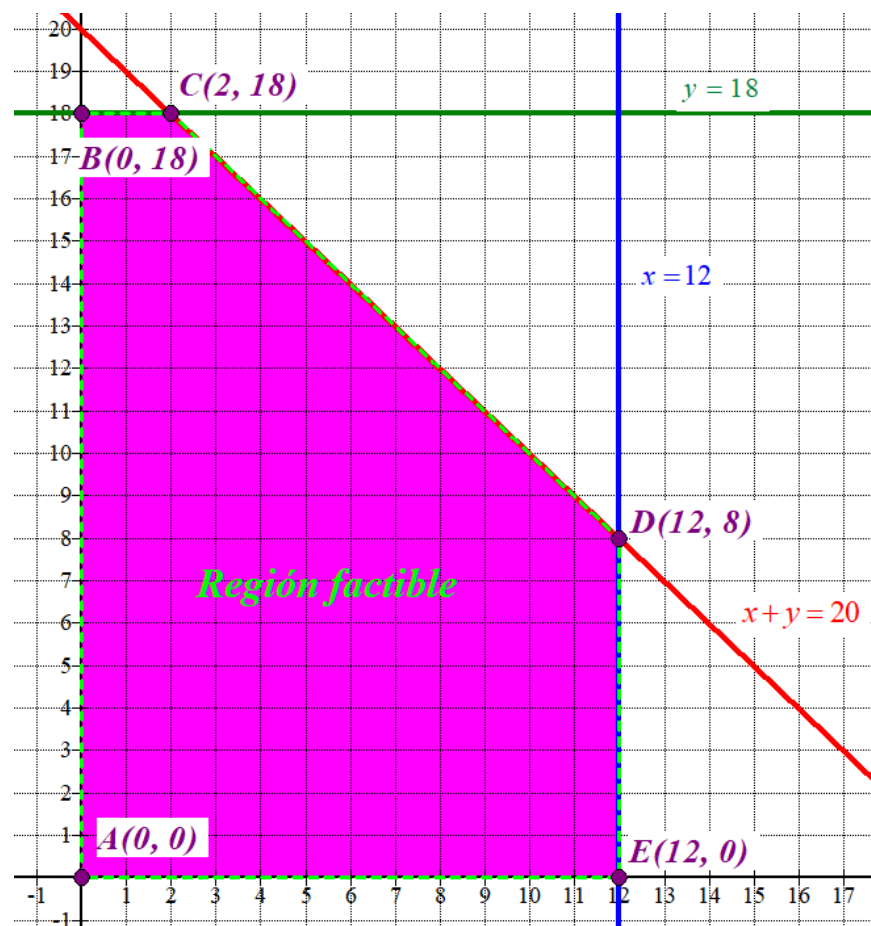
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 20 \\ x \leq 12; y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada

por debajo de la recta horizontal verde, por debajo de la recta roja y a la izquierda de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a la región indicada cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 5 \leq 20 \\ 5 \leq 12; 5 \leq 18 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



1.2 Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 20x + 25y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 18) \rightarrow I(0, 18) = 20 \cdot 0 + 25 \cdot 18 = 450$$

$$C(2, 18) \rightarrow I(2, 18) = 20 \cdot 2 + 25 \cdot 18 = 490 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(12, 8) \rightarrow I(12, 8) = 20 \cdot 12 + 25 \cdot 8 = 440$$

$$E(12, 0) \rightarrow I(12, 0) = 20 \cdot 12 + 25 \cdot 0 = 240$$

Los máximos ingresos se consiguen con la producción de 2000 botellas de Cava Brut Nature y 18000 botellas de Extra Brut. Los ingresos máximos que se consiguen son 490 000 euros.

Problema 2. (3+4+3 puntos)

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

2.1 Indica su dominio, calcula sus cortes con los ejes y sus límites en el infinito.

2.2 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcula máximos y mínimos relativos.

2.3 Con la información anterior, representa gráficamente la función f .

2.1 Al ser una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$.

$$\text{Eje OY} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{P(0,0)}$$

$$\begin{aligned} \text{Eje OX} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \\ y = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow 0 = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow 0 = x(x^2 - 6x + 9) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \boxed{P(0,0)} \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \boxed{Q(3,0)} \end{cases} \end{aligned}$$

Los puntos de corte con los ejes son $P(0, 0)$ y $Q(3, 0)$.

Calculamos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

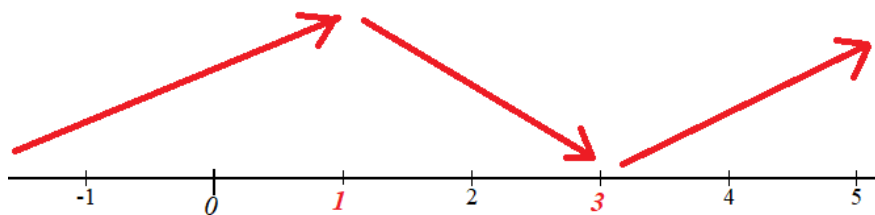
2.2 Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} &= \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases} \end{aligned}$$

Analizamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema del dibujo.



La función presenta un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

2.3 Realizamos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = x^3 - 6x^2 + 9x$
0	0
1	4 Máximo
2	2
3	0 Mínimo
4	4



Problema 3. (3+4+3 puntos)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

3.1 Clasifica el sistema dado.

3.1 Utiliza el método de Gauss para calcular todas las soluciones.

3.2 Encuentra una solución que cumpla $y = -10$.

3.1 Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + y + z = 3 \\ -2x - 2y - 2z = -6 \\ \hline -y - z = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases} \\ \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x + 3y + 3z = 9 \\ -3x - 3y - 3z = -9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El sistema triangular obtenido tiene 2 ecuaciones y 3 incógnitas. El sistema es compatible indeterminado.

3.2 Terminamos de resolver el sistema partiendo de lo obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3 - z = y \end{cases} \Rightarrow x + 3 - z + z = 3 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

3.3 Buscamos la solución pedida.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 10 = 3 - \lambda \rightarrow \lambda = 3 - 10 = -7 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -10 \\ z = -7 \end{cases} \end{aligned}$$

La solución del sistema que cumple lo pedido es $x = 0, y = 10, z = -7$.

Problema 4. (5+5 puntos)

Un 20 % de los estudiantes de una universidad no utiliza el transporte público para ir a clase. Un 80 % de los que sí utilizan, también hace uso del comedor universitario.

Se conoce también que el 95 % de los estudiantes hacen uso del transporte público o uso del comedor. Halla la probabilidad de que, seleccionado al azar un estudiante de esa universidad

4.1 resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario.

4.2 resulte ser usuario del comedor universitario.

Llamamos T al suceso “el estudiante elegido usa el transporte público” y C a “el estudiante elegido hace uso del comedor universitario”.

Sabemos que $P(\bar{T}) = 0.20$, $P(C/T) = 0.80$ y $P(T \cup C) = 0.95$.

4.1 Nos piden calcular $P(T \cap C)$.

Como $P(\bar{T}) = 0.20$ entonces $P(T) = 1 - P(\bar{T}) = 1 - 0.20 = 0.80$.

Usamos el teorema de Bayes.

$$P(C/T) = 0.80 \Rightarrow \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = 0.8 \Rightarrow P(C \cap T) = 0.8P(T) = 0.8 \cdot 0.8 = \boxed{0.64}$$

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario tiene un valor de 0.64.

4.2 Nos piden calcular $P(C)$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(T \cup C) = 0.95 \\ P(T \cup C) = P(C) + P(T) - P(C \cap T) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.95 = P(C) + 0.8 - 0.64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(C) = 0.95 - 0.8 + 0.64 = \boxed{0.79}$$

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar resulte ser usuario del comedor universitario tiene un valor de 0.79.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Un 20 % de los estudiantes de una universidad no utiliza el transporte público para ir a clase, por lo que el restante 80% si lo utiliza. Un 80 % de los que sí utilizan el transporte, también hace uso del comedor universitario, por lo que $80 \cdot 0.80 = 64$ % de los estudiantes utiliza el transporte y el comedor universitario.

4.1 La probabilidad de que un estudiante elegido al azar resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario tiene un valor de 0.64.

4.2 Hay un 95 % que usa el transporte o el comedor, por lo que el restante 5 % no usa ni comedor ni transporte. Del 80 % que usa el transporte público hay un 64 % que usa el comedor, por lo que el $80 - 64 = 16$ % de estudiantes que usa el transporte público, pero no usa el comedor.

Hay $5 + 16 = 21$ % de estudiantes que no usan el comedor, por lo que hay un $100 - 21 = 79$ % de estudiantes que usan el comedor.

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar resulte ser usuario del comedor universitario tiene un valor de 0.79.