



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS
CURSO 2023/2024

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
 - b) Tienes que **elegir únicamente tres** de entre los seis ejercicios propuestos.
 - c) Cada ejercicio se puntuará **de 0 a 10 puntos**. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.
 - d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente.
 - e) No se permite el préstamo de calculadoras. Se permite el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EJERCICIO 1

- a) [5 puntos] Racionaliza y simplifica al máximo la expresión $\frac{\sqrt[3]{\frac{216}{125}} \cdot \sqrt{\frac{32}{243}}}{\sqrt{27}}$.
- b) [5 puntos] Halla la longitud del lado de un cuadrado sabiendo que la suma de su área más seis veces su perímetro es 145 metros.

EJERCICIO 2

- a) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} + \binom{x-2}{2} = 136$.
- b) [5 puntos] Halla los valores a y b sabiendo que el polinomio $x^2 + ax + b$ es divisible por $x + 2$ y que los restos obtenidos al dividirlo entre $x + 1$ y $x + 3$ son iguales.

EJERCICIO 3

- a) [5 puntos] Halla $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{tg}(\alpha)$ sabiendo que $\sin(\pi - \alpha) = 1/4$ y $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\log(x-1) - \log(\sqrt{5+x}) - \log(\sqrt{5-x}) = 0$, donde $\log$ denota la función logaritmo decimal.

EJERCICIO 4

- a) [5 puntos] Halla el valor de m sabiendo que la función $f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 - m}$, $x^2 \neq m$, verifica $f'(1) = 1$.
- b) [5 puntos] Halla la ecuación de una recta sabiendo que su pendiente es -1 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y = 4$ y $x - 2y = 8$.

EJERCICIO 5

- a) [5 puntos] Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sea continua.
- b) [5 puntos] Halla el área de la región limitada por las rectas $y = 3x - 1$, $x = 2$, $x = 6$ y el eje OX.

EJERCICIO 6

- a) [5 puntos] Calcula las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$ y clasifícalos.
- b) [5 puntos] Estudia la posición relativa de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5 con la recta que pasa por los puntos $(1, 7)$ y $(4, 3)$.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

a) [5 puntos] Racionaliza y simplifica al máximo la expresión $\frac{\sqrt[3]{\frac{216}{125}} \cdot \sqrt[5]{\frac{32}{243}}}{\sqrt{27}}$.

b) [5 puntos] Halla la longitud del lado de un cuadrado sabiendo que la suma de su área más seis veces su perímetro es 145 metros.

a) Factorizamos todos los números que aparecen dentro de las raíces y simplificamos todo lo posible.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{\frac{216}{125}} \cdot \sqrt[5]{\frac{32}{243}}}{\sqrt{27}} &= \frac{\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 3^3}{5^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{2^5}{3^5}}}{\sqrt{3^3}} = \frac{\frac{2 \cdot 3}{5} \cdot \frac{2}{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{\frac{2 \cdot 3^2}{5 \cdot 2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\frac{3^2}{5}}{3\sqrt{3}} = \\ &= \frac{3^2}{3 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{5}} \end{aligned}$$

b) Si llamamos “x” a la longitud del lado del cuadrado tenemos que su área es “x²” y el perímetro vale “4x”. Si sabemos que la suma de su área más seis veces su perímetro es 145 metros nos queda la ecuación:

$$x^2 + 6 \cdot 4x = 145$$

Resolvemos la ecuación obtenida.

$$x^2 + 24x = 145 \Rightarrow x^2 + 24x - 145 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-145)}}{2} = \frac{-24 \pm 34}{2} = \begin{cases} \frac{-24 + 34}{2} = \boxed{5 = x} \\ \frac{-24 - 34}{2} = -29 = x \end{cases}$$

Como el lado de un cuadrado no puede ser negativo el valor del lado del cuadrado que cumple lo pedido es de 5 metros.

EJERCICIO 2

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} + \binom{x-2}{2} = 136$.

b) [5 puntos] Halla los valores a y b sabiendo que el polinomio $x^2 + ax + b$ es divisible por $x+2$ y que los restos obtenidos al dividirlo entre $x+1$ y $x+3$ son iguales.

a) Resolvemos la ecuación.

$$\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} + \binom{x-2}{2} = 136 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1)}{2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{(x-2)(x-3)}{2} = 136 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + x^2 - 2x - x + 2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = 272 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x - 264 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 88 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-88)}}{2} = \frac{3 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{3+19}{2} = \boxed{11=x} \\ \frac{3-19}{2} = \boxed{-8=x} \end{cases}$$

b) Si el polinomio $x^2 + ax + b$ es divisible por $x+2$ entonces el polinomio vale 0 para $x = -2$.

$$(-2)^2 + a(-2) + b = 0 \Rightarrow 4 - 2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2a - 4}$$

Como los restos obtenidos al dividir el polinomio $x^2 + ax + b$ entre $x+1$ y $x+3$ son iguales se cumple que el polinomio toma el mismo valor para $x = -1$ y $x = -3$.

$$(-1)^2 + a(-1) + b = (-3)^2 + a(-3) + b \Rightarrow 1 - a + b = 9 - 3a + b \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

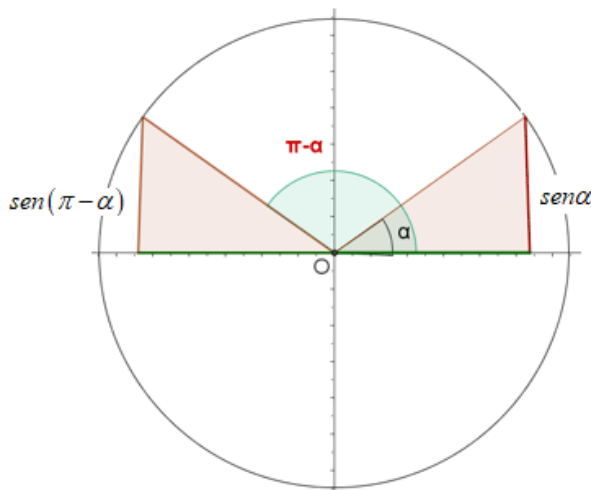
Sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida: $b = 2 \cdot 4 - 4 = 4$.

Los valores buscados son $a = b = 4$.

EJERCICIO 3

- a) [5 puntos] Halla $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ sabiendo que $\sin(\pi - \alpha) = 1/4$ y $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\log(x-1) - \log(\sqrt{5+x}) - \log(\sqrt{5-x}) = 0$, donde $\log$ denota la función logaritmo decimal.

a) Sabemos que si α es un ángulo entre 0 y 90° entonces $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.



Por lo que tenemos que $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = 1/4$.

Como es un ángulo agudo el coseno de dicho ángulo es positivo.

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ \sin \alpha = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Aplicando la definición de la tangente tenemos que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$,

Hemos obtenido que $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ y $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

b) Resolvemos la ecuación planteada.

$$\log(x-1) - \log(\sqrt{5+x}) - \log(\sqrt{5-x}) = 0 \Rightarrow \log(x-1) = \log(\sqrt{5+x}) + \log(\sqrt{5-x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(x-1) = \log(\sqrt{5+x}\sqrt{5-x}) \Rightarrow x-1 = \sqrt{(5+x)(5-x)} \Rightarrow x-1 = \sqrt{5^2 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 25 - x^2 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x = 25 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{1+7}{2} = \boxed{4=x} \\ \frac{1-7}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

De los dos valores obtenidos sólo es válido $x = 4$, ya que para $x = -3$ no existe $\log(x-1)$.

EJERCICIO 4

a) [5 puntos] Halla el valor de m sabiendo que la función $f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 - m}$, $x^2 \neq m$, verifica $f'(1) = 1$.

b) [5 puntos] Halla la ecuación de una recta sabiendo que su pendiente es -1 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y = 4$ y $x - 2y = 8$.

a) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 - m} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - m) - 2x(x^2 + m)}{(x^2 - m)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2mx - \cancel{2x^3} - 2mx}{(x^2 - m)^2} = \frac{-4mx}{(x^2 - m)^2}$$

Aplicamos que $f'(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 1 \\ f'(x) = \frac{-4mx}{(x^2 - m)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-4m \cdot 1}{(1^2 - m)^2} = 1 \Rightarrow \frac{-4m}{(1 - m)^2} = 1 \Rightarrow -4m = (1 - m)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4m = 1 + m^2 - 2m \Rightarrow 0 = m^2 + 2m + 1 \Rightarrow (m + 1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para $m = -1$ se cumple lo pedido.

a) Averiguamos las coordenadas del punto de intersección de las rectas $x + 2y = 4$ y $x - 2y = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ x = 2y + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 8 + 2y = 4 \Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2(-1) + 8 = 6} \Rightarrow P(6, -1)$$

La recta que debemos hallar es la recta r que pasa por el punto $P(6, -1)$ y tiene pendiente -1 .

$$\left. \begin{array}{l} P(6, -1) \in r \\ m = -1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow y + 1 = -1(x - 6) \Rightarrow y + 1 = -x + 6 \Rightarrow \boxed{r: y = -x + 5}$$

La ecuación de la recta con pendiente -1 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y = 4$ y $x - 2y = 8$ es $r: y = -x + 5$.

EJERCICIO 5

- a) [5 puntos] Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sea continua.
- b) [5 puntos] Halla el área de la región limitada por las rectas $y = 3x - 1$, $x = 2$, $x = 6$ y el eje OX.

a) La función es continua si lo es en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2 \\ f(1) &= k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{k=2}$$

Para $k = 2$ la función es continua.

b) Dibujamos la región del plano limitada por las tres rectas y el eje de abscisas.

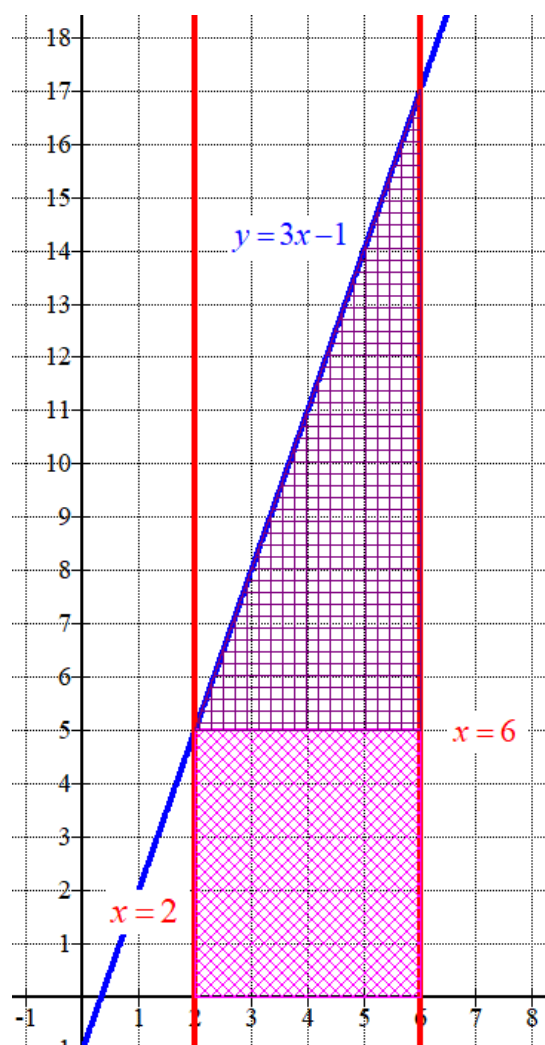
x	$y = 3x - 1$
2	5
4	11
6	17

La región de la cual queremos hallar su área esta compuesta de un rectángulo de lados 4 y 5 y de un triángulo de base 4 y altura $17 - 5 = 12$.

$$\text{Área} = 4 \cdot 5 + \frac{4 \cdot 12}{2} = 44 \text{ unidades cuadradas.}$$

Hallamos el área haciendo uso del cálculo integral.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^6 3x - 1 dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x \right]_2^6 = \\ &= \left[\frac{3 \cdot 6^2}{2} - 6 \right] - \left[\frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 \right] = 44 u^2 \end{aligned}$$



El área de la región limitada por las rectas $y = 3x - 1$, $x = 2$, $x = 6$ y el eje OX tiene un valor de 44 unidades cuadradas.

EJERCICIO 6

- a) [5 puntos] Calcula las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$ y clasifícalos.
- b) [5 puntos] Estudia la posición relativa de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5 con la recta que pasa por los puntos $(1, 7)$ y $(4, 3)$.

- a) Determinamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-15)}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2+8}{2} = 5 = x \\ \frac{2-8}{2} = -3 = x \end{array} \right.$$

Sustituimos estos dos valores obtenidos en la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(-3) = 6(-3) - 6 = -24 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \\ f''(5) = 6 \cdot 5 - 6 = 24 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \end{array} \right.$$

La función presenta un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = 5$.

- b) Los puntos de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5 cumplen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 25}$$

Los puntos de la recta que pasa por los puntos $(1, 7)$ y $(4, 3)$ cumplen la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} (1, 7) \in r \\ (4, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (1, 7) \in r \\ m = \frac{7-3}{1-4} = \frac{-4}{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 7 = \frac{-4}{-3}(x - 1) \Rightarrow y = 7 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-4}{3}x + \frac{25}{3}}$$

Planteo un sistema con las ecuaciones de recta y circunferencia para averiguar cuántos puntos de corte tienen.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{-4}{3}x + \frac{25}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{-4x + 25}{3} \right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{(-4x + 25)^2}{9} = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 + (-4x + 25)^2 = 225 \Rightarrow 9x^2 + 16x^2 + 625 - 200x = 225 \Rightarrow 25x^2 - 200x + 400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4 \Rightarrow y = \frac{-4 \cdot 4 + 25}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{A(4, 3)}$$

Al existir un único punto de corte la recta es tangente a la circunferencia, siendo el punto de tangencia el punto $A(4, 3)$.

