



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS
CURSO 2024/2025

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
 - b) Tienes que **elegir únicamente tres** de entre los seis ejercicios propuestos.
 - c) Cada ejercicio se puntuará **de 0 a 10 puntos**. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.
 - d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente.
 - e) No se permite el préstamo de calculadoras. Se permite el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EJERCICIO 1

- a) [5 puntos] Halla los valores de a y b sabiendo que el polinomio $x^3 - ax^2 + b$ tiene una raíz en $x = -1$ y que el cociente de dividirlo por $x^2 - 1$ es $x - 3$.
- b) [5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 5x^4}{3x^3 - 5x^4 - 4x^2}$.

EJERCICIO 2

- a) [5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{6-x}{(1-x)^2}$, $x \neq 1$.
- b) [5 puntos] Calcula el valor de a que verifique la igualdad: $\frac{\sqrt{112a} - \sqrt{7a} + \sqrt{63}\sqrt{100a}}{\sqrt{28a} + 4\sqrt{63a} - \sqrt{175a^3}} = \frac{-1}{2}$.

EJERCICIO 3

- a) [5 puntos] Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3, 0)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x + 5$.
- b) [5 puntos] Calcule el valor de a sabiendo que $a > 0$ y que $\int_0^a \frac{2x}{1+x^2} dx = 1$.

EJERCICIO 4

- a) [5 puntos] Halla los ángulos α (en radianes) tales que $\cos(2\alpha) - 4\operatorname{sen}(\alpha) = 1$ y $0 \leq \alpha < 2\pi$.
- b) [5 puntos] Calcula los intervalos donde la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ es creciente.

EJERCICIO 5

- a) [5 puntos] Calcula el valor de a para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + ax - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$, sea paralela a la recta $5x - y - 3 = 0$.
- b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $5^x = \frac{1}{125} 5^{6-2x}$, y comprueba el resultado.

EJERCICIO 6

- a) [5 puntos] Calcula el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq -3 \\ a + 6x + 25 & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

- b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $2\log_5(x+2) - \log_5(x-2) = 2$, donde $\log_5 x$ representa al logaritmo en base 5 de x , y comprueba el resultado.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

a) [5 puntos] Halla los valores de a y b sabiendo que el polinomio $x^3 - ax^2 + b$ tiene una raíz en $x = -1$ y que el cociente de dividirlo por $x^2 - 1$ es $x - 3$.

b) [5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 5x^4}{3x^3 - 5x^4 - 4x^2}$.

a) Si el polinomio $x^3 - ax^2 + b$ tiene una raíz en $x = -1$ entonces el polinomio vale 0 para $x = -1$.

$$(-1)^3 - a(-1) + b = 0 \Rightarrow -1 + a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1 - a}$$

El cociente de dividir el polinomio $x^3 - ax^2 + b$ por $x^2 - 1$ es $x - 3$, siendo el resto de la división un polinomio de grado 1: $Mx + N$, entonces $x^3 - ax^2 + b = (x - 3)(x^2 - 1) + Mx + N$.

$$x^3 - ax^2 + b = (x - 3)(x^2 - 1) + Mx + N \Rightarrow x^3 - ax^2 + b = x^3 - x - 3x^2 + 3 + Mx + N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - ax^2 + b = x^3 - 3x^2 + (M - 1)x + (3 + N) \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida: $b = 1 - 3 = -2$.

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -2$.

b) Calculamos el límite pedido simplificando antes la expresión.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 5x^4}{3x^3 - 5x^4 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - 5x^2) \cancel{x^2}}{(3x - 5x^2 - 4) \cancel{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 5x^2}{3x - 5x^2 - 4} = \frac{2 - 5 \cdot 0^2}{3 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 - 4} = \frac{2}{-4} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

EJERCICIO 2

a) [5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{6-x}{(1-x)^2}$, $x \neq 1$.

b) [5 puntos] Calcula el valor de a que verifique la igualdad: $\frac{\sqrt{112a} - \sqrt{7a} + \sqrt{63}\sqrt{100a}}{\sqrt{28a} + 4\sqrt{63a} - \sqrt{175a^3}} = \frac{-1}{2}$.

a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6-x}{(1-x)^2} = \frac{6-1}{(1-1)^2} = \frac{5}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-x}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-x}{1+x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al existir asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.

b) Simplificamos todo lo posible la expresión proporcionada y la resolvemos.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{112a} - \sqrt{7a} + \sqrt{63}\sqrt{100a}}{\sqrt{28a} + 4\sqrt{63a} - \sqrt{175a^3}} &= \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{4^2 \cdot 7a} - \sqrt{7a} + \sqrt{3^2 \cdot 7} \sqrt{10^2 a}}{\sqrt{2^2 \cdot 7a} + 4\sqrt{3^2 \cdot 7a} - \sqrt{5^2 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot a}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{4\sqrt{7a} - \sqrt{7a} + 3\sqrt{7} \cdot 10\sqrt{a}}{2\sqrt{7a} + 4 \cdot 3\sqrt{7a} - 5a\sqrt{7a}} &= \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{4\sqrt{7a} - \sqrt{7a} + 30\sqrt{7a}}{2\sqrt{7a} + 12\sqrt{7a} - 5a\sqrt{7a}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{33\cancel{\sqrt{7a}}}{(14-5a)\cancel{\sqrt{7a}}} &= \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{33}{14-5a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 66 = -14 + 5a \Rightarrow 80 = 5a \Rightarrow \boxed{a = \frac{80}{5} = 16} \end{aligned}$$

EJERCICIO 3

a) [5 puntos] Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3, 0)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x + 5$.

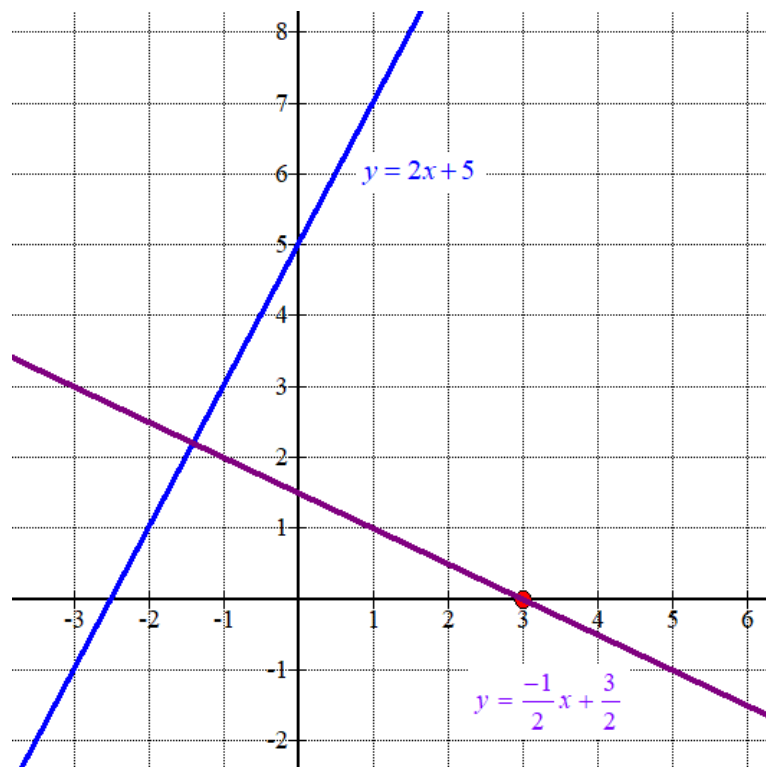
b) [5 puntos] Calcule el valor de a sabiendo que $a > 0$ y que $\int_0^a \frac{2x}{1+x^2} dx = 1$.

a) La recta $y = 2x + 5$ tiene pendiente 2, por lo que la recta perpendicular a ella tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

La recta que pasa por el punto $(3, 0)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x + 5$ es la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ que pasa por el punto $(3, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} m = -\frac{1}{2} \\ (3, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

La recta buscada tiene ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



b) Calculamos la integral definida y resolvemos la igualdad.

$$\int_0^a \frac{2x}{1+x^2} dx = 1 \Rightarrow \left[\ln(1+x^2) \right]_0^a = 1 \Rightarrow \ln(1+a^2) - \ln(1+0^2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+a^2) = 1 \Rightarrow 1+a^2 = e^1 \Rightarrow a^2 = e-1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{e-1}}$$

El valor buscado es $a = \sqrt{e-1}$.

EJERCICIO 4

a) [5 puntos] Halla los ángulos α (en radianes) tales que $\cos(2\alpha) - 4\operatorname{sen}(\alpha) = 1$ y $0 \leq \alpha < 2\pi$.

b) [5 puntos] Calcula los intervalos donde la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ es creciente.

a) Utilizamos la fórmula del coseno del ángulo doble: $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\cos(2\alpha) - 4\operatorname{sen}(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha - 4\operatorname{sen} \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha - 4\operatorname{sen} \alpha = 1 \Rightarrow -2\operatorname{sen}^2 \alpha - 4\operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \{0 \leq \alpha < 2\pi\} \rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ \boxed{\alpha = \pi} \end{cases} \\ \operatorname{sen} \alpha + 2 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -2 \rightarrow \text{¡Imposible! } -1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Los ángulos que cumplen lo pedido son 0 y π radianes.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

EJERCICIO 5

a) [5 puntos] Calcula el valor de a para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + ax - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$, sea paralela a la recta $5x - y - 3 = 0$.

b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $5^x = \frac{1}{125} 5^{6-2x}$, y comprueba el resultado.

a) Hallamos la pendiente de la recta $5x - y - 3 = 0$.

$$5x - y - 3 = 0 \Rightarrow 5x - 3 = y \Rightarrow \text{pendiente} = 5$$

Para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + ax - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$, sea paralela a la recta $5x - y - 3 = 0$ debe tener pendiente 5, por lo que la derivada de la función en $x = 1$ debe valer 5 $\rightarrow f'(1) = 5$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = x^2 + ax - 1 &\rightarrow f'(x) = 2x + a \\ f'(1) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = 2 \cdot 1 + a \Rightarrow 5 - 2 = a \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Para $a = 3$ se cumple lo pedido.

b) Resolvemos la ecuación.

$$5^x = \frac{1}{125} 5^{6-2x} \Rightarrow 5^x = \frac{1}{5^3} 5^{6-2x} \Rightarrow 5^x = 5^{6-2x-3} \Rightarrow 5^x = 5^{3-2x} \Rightarrow x = 3 - 2x \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Comprobamos que la solución $x = 1$ es correcta.

$$\left. \begin{aligned} 5^x &= \frac{1}{125} 5^{6-2x} \\ x &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5^1 = 5 \\ \frac{1}{125} 5^{6-2 \cdot 1} = \frac{1}{125} 5^4 = \frac{1}{125} 625 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Se cumple!}$$

EJERCICIO 6

a) [5 puntos] Calcula el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq -3 \\ a + 6x + 25 & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

b) [5 puntos] Resuelve la ecuación $2\log_5(x+2) - \log_5(x-2) = 2$, donde $\log_5 x$ representa al logaritmo en base 5 de x , y comprueba el resultado.

a) La función es continua si lo es en $x = -3$.

$$\left. \begin{aligned} f(-3) &= a(-3)^2 - 2(-3) + 3 = 9a + 9 \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} ax^2 - 2x + 3 = 9a + 9 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} a + 6x + 25 = a + 6(-3) + 25 = a + 7 \\ f(-3) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9a + 9 = a + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$$

Para $a = \frac{-1}{4}$ la función es continua.

b) Resolvemos la ecuación planteada.

$$2\log_5(x+2) - \log_5(x-2) = 2 \Rightarrow \log_5(x+2)^2 - \log_5(x-2) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 \frac{(x+2)^2}{x-2} = 2 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{x-2} = 5^2 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{x-2} = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 25x - 50 \Rightarrow x^2 + 4 + 4x = 25x - 50 \Rightarrow x^2 - 21x + 54 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 54}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} = \begin{cases} \frac{21+15}{2} = 18 = x \\ \frac{21-15}{2} = 3 = x \end{cases}$$

Comprobamos si las dos soluciones obtenidas son válidas.

$$\left\{ \begin{aligned} &2\log_5(x+2) - \log_5(x-2) = 2? \\ &x = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\log_5(3+2) - \log_5(3-2) = 2\log_5 5 - \log_5 1 = 2 - 0 = 2$$

Se cumple y el valor $x = 3$ es solución de la ecuación.

$$\left\{ \begin{aligned} &2\log_5(x+2) - \log_5(x-2) = 2? \\ &x = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\log_5(18+2) - \log_5(18-2) =$$

$$= 2\log_5 20 - \log_5 16 = 2\log_5 (4 \cdot 5) - \log_5 4 \cdot 4 = 2(\log_5 4 + \log_5 5) - \log_5 4 - \log_5 4 =$$

$$= 2(\log_5 4 + 1) - 2\log_5 4 = 2\log_5 4 + 2 - 2\log_5 4 = 2 \Rightarrow \text{¡Se cumple!}$$

Se cumple y el valor $x=18$ es solución de la ecuación.

Las soluciones de la ecuación $2\log_5 (x+2) - \log_5 (x-2) = 2$ son $x=3$ y $x=18$.