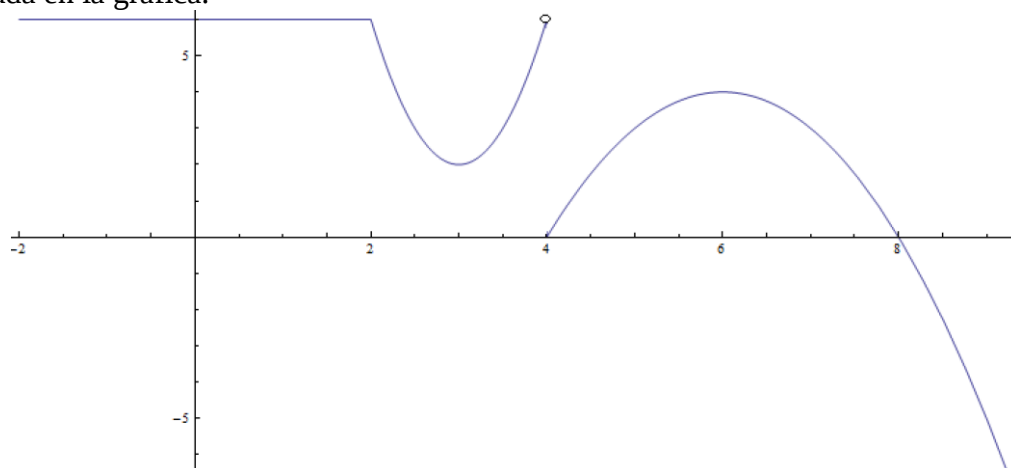


MATERIA: MATEMÁTICAS ESPECIALES
2/2

- 1) a) (0.5 puntos) Resolver la ecuación $\frac{x+1}{x-3} = \frac{3+x}{2x-3}$
- b) (0.25 puntos) Comprobar si $x=15$ es solución de la desigualdad $\left| \frac{2x-5}{2} - 4x \right| < 20$
- c) (0.25 puntos) ¿Para qué valores de x se cumple $x^2 + x + 1 < 0$?
- d) (0.5 puntos) Resuelve la desigualdad $-8 < \frac{5x}{2} - 4x < 30$
- 2) a) (0.5 puntos) Representar gráficamente y calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1, -1)$ y $Q(3, 7)$
- b) (0.75 puntos) Calcula la ecuación de dos rectas que pasen por el punto $(1, 3)$ y sean perpendiculares entre ellas y represéntalas
- 3) a) (0.5 puntos) Razona si un triángulo cuyos lados miden 5, 7 y 10 unidades es o no es un triángulo rectángulo.
- b) (0.75 puntos) Razona si dos triángulos rectángulos que tienen la misma área y los dos triángulos tienen un cateto que mide 8 unidades, son o no son iguales.
- 4) a) (0.5 puntos) En una progresión aritmética, la suma de los 50 primeros términos es 15050 y el término 50 vale 595. Calcular a_1 y d .
- b) Un aparcamiento tiene 1500 plazas, tiene 340 ocupadas cuando abre sus puertas y entran 18 coches por minuto. Si no sale ningún coche.
- (0.25 puntos) ¿Cuántos coches habrá en el aparcamiento al cabo 45 minutos?
- (0.5 puntos) ¿Cuánto tardará en llenarse el aparcamiento?
- 5) a) (0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = \frac{6x}{5-3x}$ Calcular $(f \circ g)(4)$
- b) (0.5 puntos) Justifica cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{3x-6} - \sqrt{2x-8}$
- c) (0.75 puntos) Comentar acotación, continuidad, crecimiento y decrecimiento de la función representada en la gráfica.

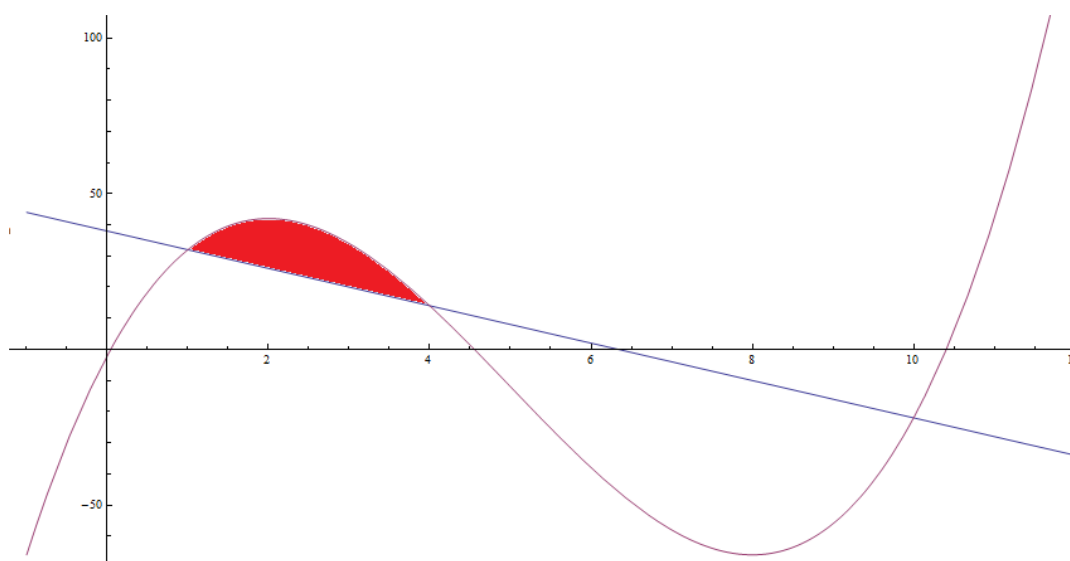


- 6) a) (0.75 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ -x + 10 & \text{si } x > 6 \end{cases}$ Representéla
- b) (0.75 pt) Calcular los máximos y mínimos de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$
- c) (0.5 pt) Sea $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x - 8} - 7 \cdot \ln(x)$ ¿Es $f(x)$ creciente en $x = 5$?

7) (1 punto) En la gráfica están representadas

$$g(x) = x^3 - 15x^2 + 48x - 2 \quad \text{y} \quad f(x) = -6x + 38$$

Calcular el área sombreada, que está comprendida entre $x = 1$ y $x = 4$



$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
---	---------------------------	-------------------------------------

Progresiones Aritméticas	Progresiones geométricas
$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$

Trigonometría	
$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	$h^2 = a^2 + b^2$

SOLUCIONES

- 1) a) (0.5 puntos) Resolver la ecuación $\frac{x+1}{x-3} = \frac{3+x}{2x-3}$ es:
- b) (0.25 puntos) Comprobar si $x=15$ es solución de la desigualdad $\left| \frac{2x-5}{2} - 4x \right| < 20$
- c) (0.25 puntos) ¿Para qué valores de x se cumple $x^2 + x + 1 < 0$?
- d) (0.5 puntos) Resuelve la desigualdad $-8 < \frac{5x}{2} - 4x < 30$

a) Resolvemos la ecuación.

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{3+x}{2x-3} \Rightarrow (x+1)(2x-3) = (x-3)(x+3) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 2x - 3 = x^2 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2} = \text{Sin solución}$$

Al salir un radicando negativo la ecuación no tiene solución real.

b) Comprobamos si $x=15$ cumple la desigualdad indicada.

$$\left| \frac{2x-5}{2} - 4x \right| < 20 \Bigg|_{x=15} \Rightarrow \left| \frac{2 \cdot 15 - 5}{2} - 4 \cdot 15 \right| < 20? \Rightarrow \left| \frac{30-5}{2} - 60 \right| < 20? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{25}{2} - 60 \right| < 20? \Rightarrow |12.5 - 60| < 20? \Rightarrow |-47.5| < 20? \Rightarrow 47.5 < 20? \Rightarrow \text{¡No!}$$

No se cumple la desigualdad para $x=15$.

c) Averiguamos primero cuando se cumple la igualdad $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \text{No existe solución}$$

La igualdad no tiene solución por lo que la desigualdad se cumple siempre o nunca.

Comprobamos si se cumple para un punto cualquiera de la recta real. Si se cumple para ese punto se cumple para todos los números reales, si no se cumple para ese valor no se cumple para ningún valor real. Consideramos $x=0$.

$$x^2 + x + 1 < 0 \Bigg|_{x=0} \Rightarrow 0^2 + 0 + 1 < 0? \Rightarrow 1 < 0? \Rightarrow \text{¡No!}$$

La inecuación $x^2 + x + 1 < 0$ no tiene solución.

d) Resolvemos la inecuación planteada.

$$-8 < \frac{5x}{2} - 4x < 30 \Rightarrow -16 < 5x - 8x < 60 \Rightarrow -16 < -3x < 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-16}{-3} > x > \frac{60}{-3} \Rightarrow -20 < x < \frac{16}{3}$$

La solución son todos los valores mayores que -20 y menores que $\frac{16}{3}$.

- 2) a) (0.75 puntos) Representar gráficamente y calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1, -1)$ y $Q(3, 7)$
- b) (0.75 puntos) Calcula la ecuación de dos rectas que pasen por el punto $(1, 3)$ y sean perpendiculares entre ellas y represéntalas

a) Hallamos la pendiente de la recta que une estos dos puntos.

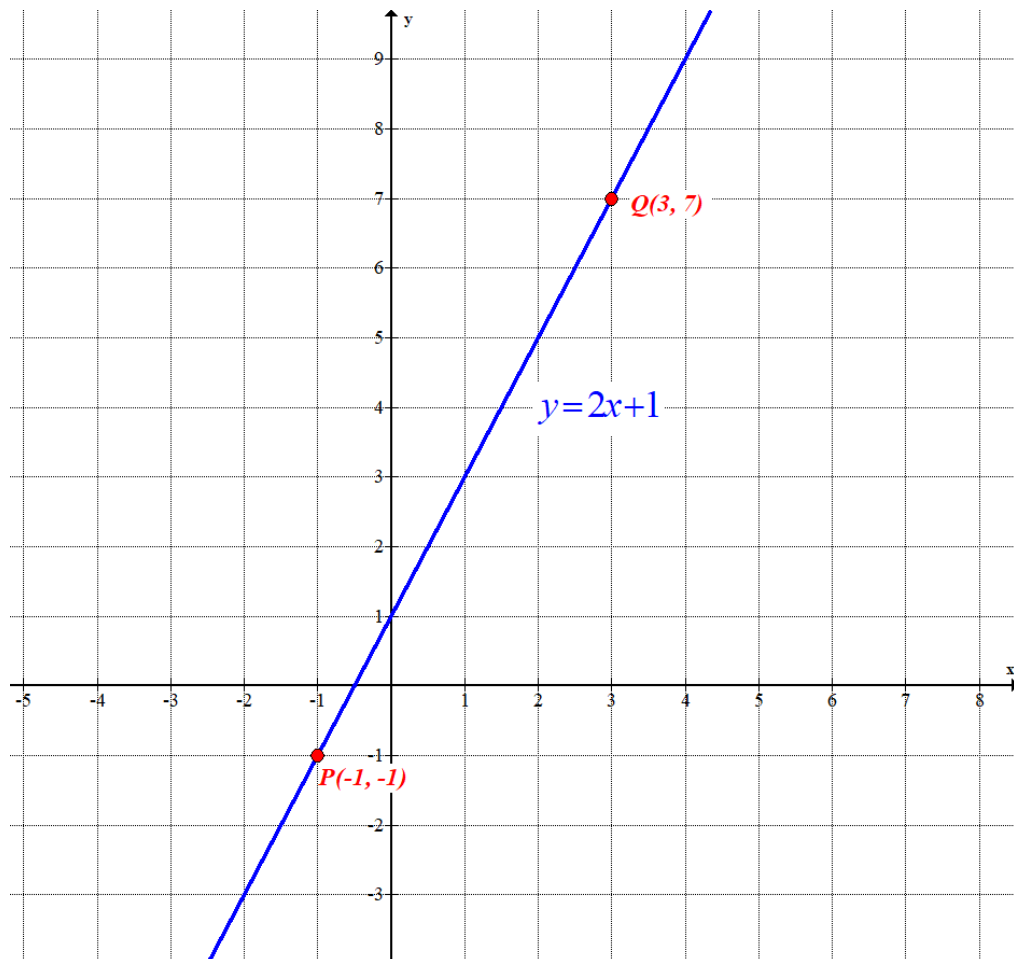
$$\left. \begin{array}{l} P(-1, -1) \\ Q(3, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{7 - (-1)}{3 - (-1)} = 2$$

Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1, -1) \in r \\ m = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-1) = 2(x - (-1)) \Rightarrow y + 1 = 2(x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 1 = 2x + 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es $y = 2x + 1$.



b) Para que dos rectas sean perpendiculares deben tener pendientes m y $m' = \frac{-1}{m}$.

Hallamos las rectas que pasan por $(1, 3)$ con pendientes 1 y -1 .

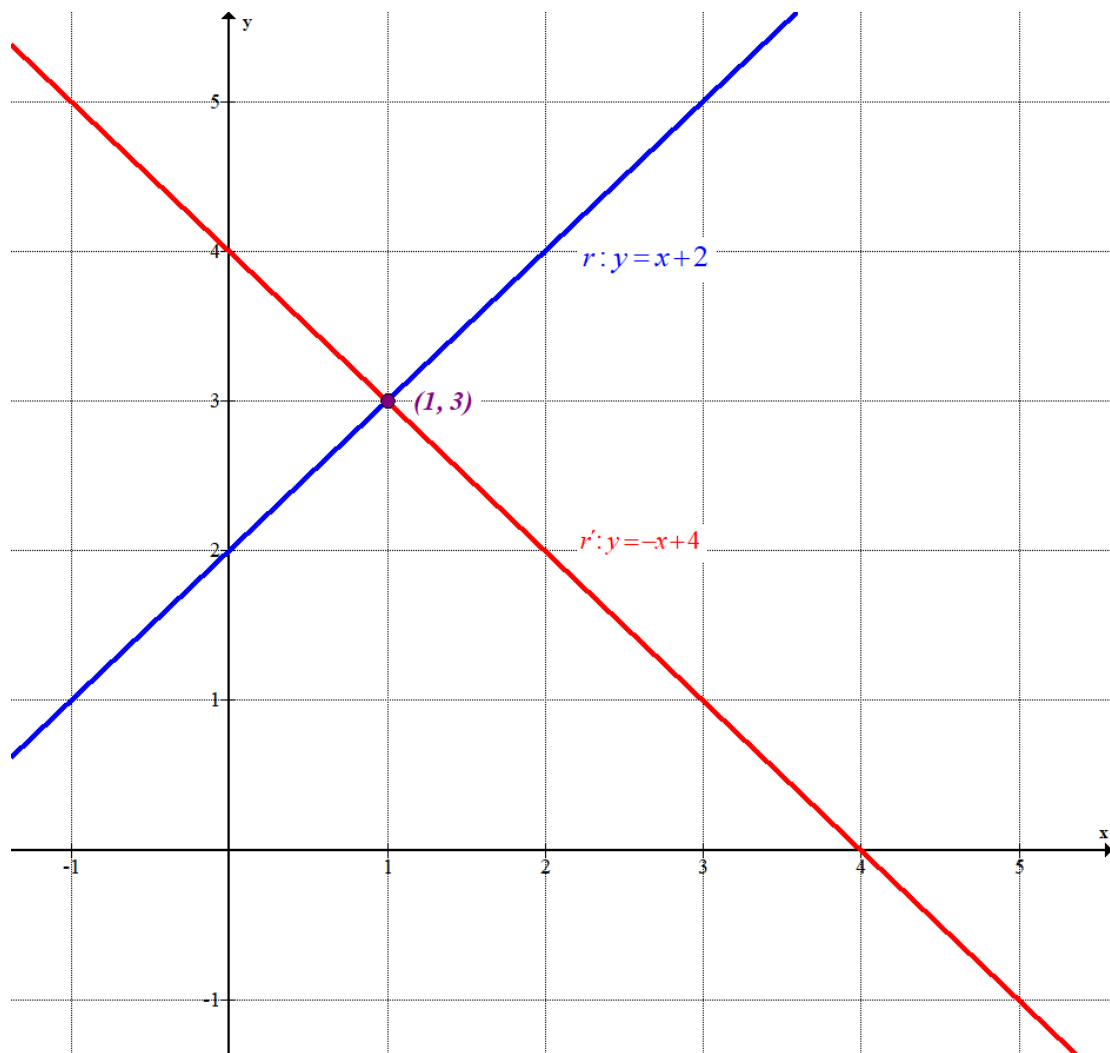
$$\left. \begin{array}{l} P(1,3) \in r \\ m=1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-3=1(x-1) \Rightarrow y-3=x-1 \Rightarrow \boxed{r: y=x+2}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,3) \in r' \\ m'=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-3=-1(x-1) \Rightarrow y-3=-x+1 \Rightarrow \boxed{r': y=-x+4}$$

Representamos las dos rectas obtenidas: $r: y=x+2$ y $r': y=-x+4$

x	$y = x + 2$
1	3
0	2

x	$y = -x + 4$
1	3
0	4



- 3) a) (0.5 puntos) Razona si un triángulo cuyos lados miden 5, 7 y 10 unidades es o no es un triángulo rectángulo.
- b) (0.75 puntos) Razona si dos triángulos rectángulos que tienen la misma área y los dos triángulos tienen un cateto que mide 8 unidades, son o no son iguales.

- a) Para que un triángulo sea rectángulo debe cumplir el teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$.
Comprobamos si el triángulo de lados 5, 7 y 10 unidades lo cumple. Evidentemente el lado más largo lo consideramos la hipotenusa (h).

$$\text{¿}10^2 = 5^2 + 7^2 \text{?} \Rightarrow \text{¿}100 = 25 + 49 \text{?} \Rightarrow \text{¡No!}$$

No se cumple el teorema de Pitágoras y el triángulo cuyos lados miden 5, 7 y 10 unidades no es un triángulo rectángulo.

- b) El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. En un triángulo rectángulo coincide la base con un cateto y la altura con el otro cateto. Si tienen un cateto igual y tienen la misma área el otro cateto también debe ser igual. Aplicando el teorema de Pitágoras la hipotenusa también debe ser igual. Los triángulos son iguales.

- 4) a) (0.5 puntos) En una progresión aritmética, la suma de los 50 primeros términos es 15050 y el término 50 vale 595. Calcular a_1 y d .
- b) Un aparcamiento tiene 1500 plazas, tiene 340 ocupadas cuando abre sus puertas y entran 18 coches por minuto. Si no sale ningún coche.
 (0.25 puntos) ¿Cuántos coches habrá en el aparcamiento al cabo 45 minutos?
 (0.5 puntos) ¿Cuánto tardará en llenarse el aparcamiento?

a) Utilizamos la fórmula de la suma $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \Rightarrow 15050 = 25(a_1 + 595) \Rightarrow \frac{15050}{25} = a_1 + 595 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 602 = a_1 + 595 \Rightarrow \boxed{a_1 = 602 - 595 = 7}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_{50} = 595 \\ a_1 = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 595 = 7 + (50-1)d \Rightarrow 595 - 7 = 49d \Rightarrow \boxed{d = \frac{588}{49} = 12}$$

El primer término es 7 y la diferencia entre términos consecutivos es 12.

- b) Se trata de una progresión aritmética con primer término 340 y diferencia 18. Los minutos que pasan son " n ". Así el valor de a_n es el número de plazas ocupadas cuando pasan n minutos. Nos piden hallar el valor de a_{45} .

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_1 = 340 \\ d = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{45} = 340 + (45-1) \cdot 18 = 1132$$

Al cabo de 45 minutos hay 1132 plazas ocupadas.

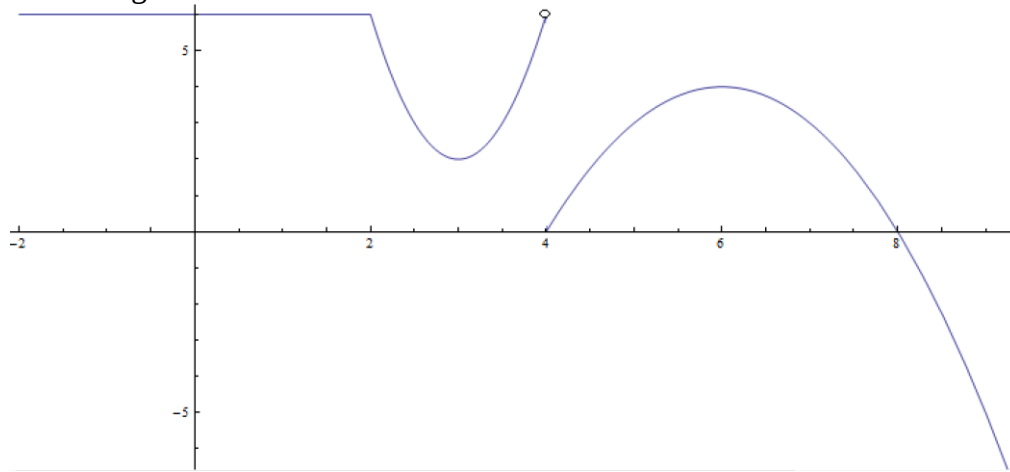
Debemos hallar cuanto debe valer n para que $a_n = 1500$.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_1 = 340 \\ d = 18 \\ a_n = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow 1500 = 340 + (n-1) \cdot 18 \Rightarrow 1500 = 340 + 18n - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1178 = 18n \Rightarrow n = \frac{1178}{18} = 65.4444...$$

No da exacto. En el minuto 65 hay $a_{65} = 340 + (65-1) \cdot 18 = 1492$ plazas ocupadas, solo quedan 8 libres. Se llena antes de pasar el siguiente minuto.

- 5) a) (0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = \frac{6x}{5-3x}$. Calcular $(f \circ g)(4)$
- b) (0.5 puntos) Justifica cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{3x-6} - \sqrt{2x-8}$
- c) (0.75 puntos) Comentar acotación, continuidad, crecimiento y decrecimiento de la función representada en la gráfica.



$$a) (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f\left(\frac{6 \cdot 4}{5 - 3 \cdot 4}\right) = f\left(\frac{24}{-7}\right) = f\left(-\frac{24}{7}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{24}{7}\right)^2 + 5 = \boxed{133}$$

- b) El dominio de la función son todos los valores reales que hacen positivo o cero el radicando y que no anulen el denominador de la fracción.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 8 \geq 0 \\ 3x - 6 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x \geq 8 \\ 3x \neq 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq \frac{8}{2} \\ x \neq \frac{6}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x \geq 4}$$

El dominio de la función es $[4, +\infty)$.

- c) La gráfica nos permite afirmar que la función está acotada superiormente por 6 y no está acotada inferiormente.

La función es discontinua en $x = 4$. La función es continua en $\mathbb{R} - \{4\}$.

La función es constante en el intervalo $(-\infty, 2)$, decrece en $[2, 3) \cup (6, +\infty)$ y crece en $(3, 4) \cup (4, 6)$.

- 6) a) (0.75 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ -x + 10 & \text{si } x > 6 \end{cases}$ Representéla
- b) (0.75 pt) Calcular los máximos y mínimos de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$
- c) (0.5 pt) Sea $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x - 8} - 7 \cdot \ln(x)$ ¿Es $f(x)$ creciente en $x = 5$?

a) La gráfica de la función es un trozo de recta horizontal, un trozo de parábola y un trozo de recta decreciente.

Hallamos el vértice de la parábola.

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y_v = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 \Rightarrow \text{Vértice}(3, -1)$$

Estudiamos la continuidad en los cambios de definición: $x = 1$ y $x = 6$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 6x + 8 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

La función es continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= 6^2 - 6 \cdot 6 + 8 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} -x + 10 = -6 + 10 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} x^2 - 6x + 8 = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 8 \neq 4 = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$$

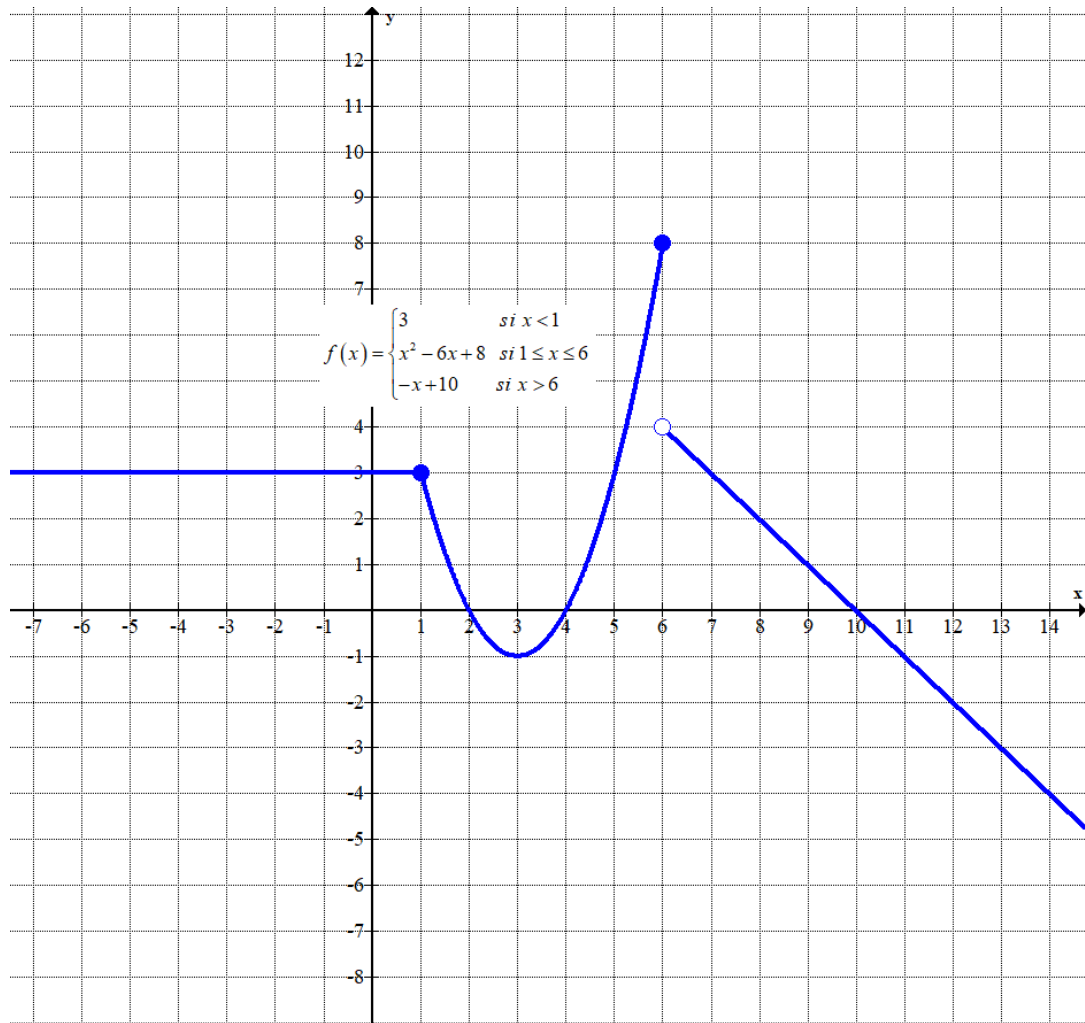
La función es discontinua en $x = 6$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$f(x) = 3$
-1	3
0	3

x	$f(x) = x^2 - 6x + 8$
1	3
3	-1
6	8

x	$f(x) = -x + 10$
7	3
8	2



b) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3} = \begin{cases} \frac{4 + \sqrt{13}}{3} \approx 2.53 \\ \frac{4 - \sqrt{13}}{3} \approx 0.13 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$ y $x = \frac{4 + \sqrt{13}}{3}$.

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y comprobamos su signo.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow \begin{cases} f''(2.53) = 6 \cdot 2.53 - 8 = 7.18 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \\ f''(0.13) = 6 \cdot 0.13 - 8 = -7.22 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{4 + \sqrt{13}}{3}$ y un máximo relativo en $x = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$.

c) Sustituimos el valor $x = 5$ en la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2 - 10}{x - 8} - 7 \cdot \ln(x)$ y vemos si el resultado es negativo o positivo.

$$f(x) = \frac{x^2 - 10}{x - 8} - 7 \cdot \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x - 8) - 1 \cdot (x^2 - 10)}{(x - 8)^2} - 7 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2x^2 - 16x - x^2 + 10}{(x - 8)^2} - \frac{7}{x} = \frac{x^2 - 16x + 10}{(x - 8)^2} - \frac{7}{x}$$

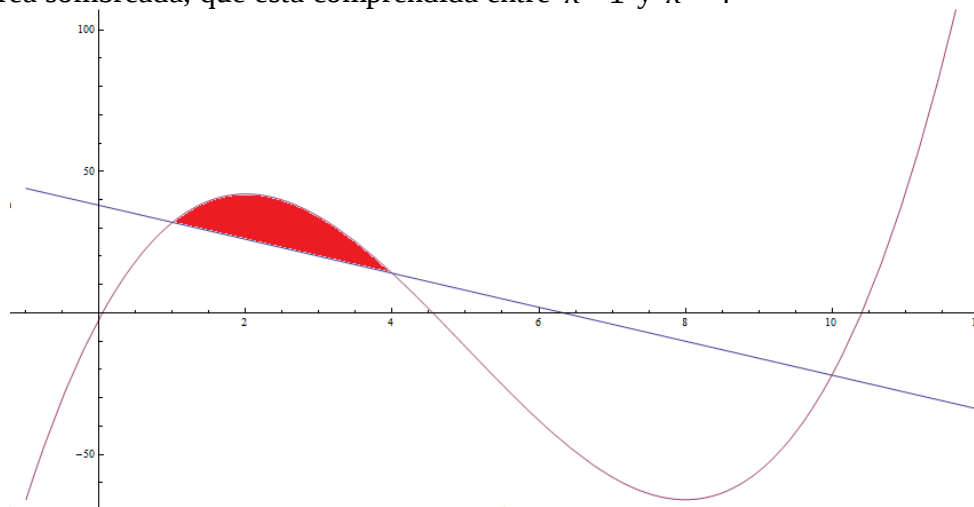
$$f'(5) = \frac{5^2 - 16 \cdot 5 + 10}{(5 - 8)^2} - \frac{7}{5} = \frac{-45}{9} - \frac{7}{5} = \frac{-32}{5} < 0$$

Como el signo de la derivada es negativo la función es decreciente en $x = 5$.

7) (1 punto) En la gráfica están representadas

$$g(x) = x^3 - 15x^2 + 48x - 2 \quad \text{y} \quad f(x) = -6x + 38$$

Calcular el área sombreada, que está comprendida entre $x=1$ y $x=4$



El área sombreada, que está comprendida entre $x=1$ y $x=4$ es el valor de la integral definida de 1 a 4 de la diferencia entre $g(x) = x^3 - 15x^2 + 48x - 2$ y $f(x) = -6x + 38$.

$$\text{Área} = \int_1^4 g(x) - f(x) dx = \int_1^4 x^3 - 15x^2 + 48x - 2 - (-6x + 38) dx =$$

$$= \int_1^4 x^3 - 15x^2 + 48x - 2 + 6x - 38 dx = \int_1^4 x^3 - 15x^2 + 54x - 40 dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{15x^3}{3} + \frac{54x^2}{2} - 40x \right]_1^4 = \left[\frac{x^4}{4} - 5x^3 + 27x^2 - 40x \right]_1^4 =$$

$$= \left[\frac{4^4}{4} - 5 \cdot 4^3 + 27 \cdot 4^2 - 40 \cdot 4 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 5 \cdot 1^3 + 27 \cdot 1^2 - 40 \cdot 1 \right] = \frac{135}{4} = \boxed{33.75 \text{ u}^2}$$

