



**PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PARA MAYORES DE 25 Y 45 AÑOS
ABRIL DE 2024**

MATERIA: MATEMÁTICAS ESPECIALES

2/2

- 1) a) (0.5 puntos) Resolver la ecuación $\frac{x+1}{x-3} = \frac{3+x}{2x-3}$ es:
- b) (0.5 puntos) Comprobar si $x=15$ es solución de la desigualdad $\left| \frac{2x-5}{2} - 4x \right| < 20$
- c) (0.5 puntos) ¿Para qué valores de x se cumple $x^2 + x + 1 < 0$?
- 2) a) (0.75 puntos) Representar gráficamente y calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1, -1)$ y $Q(3, 7)$
- b) (0.75 puntos) Calcula la ecuación de dos rectas que pasen por el punto $(1, 3)$ y sean perpendiculares entre ellas y represéntalas
- 3) a) (0.25 puntos) Razona si un triángulo cuyos lados miden 9, 12 y 15 unidades es o no es un triángulo rectángulo.
- b) (0.25 puntos) Razona si un triángulo cuyos lados miden $3a, 4a$ y $5a$ unidades es o no es un triángulo rectángulo.
- c) (0.5 puntos) En un triángulo rectángulo sus catetos miden 15 y a respectivamente y su hipotenusa mide $4a$. Resolver el triángulo.
- 4) a) En una progresión aritmética $a_1 = 12$ y $d = 7$.
- a.1) (0.5 puntos) Calcular la suma de los 200 primeros términos.
- a.2) (0.5 puntos) Calcular la suma de los términos del 121 al 200.
- b) En la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{6n^2 + n - 5}{-2n^2 + n + 1}$
- b.1) (0.25 puntos) ¿Calcular el término 100?
- b.2) (0.5 puntos) ¿Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?
- 5) a) (0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = \frac{6x}{5-3x}$ Calcular $(f \circ g)(4)$
- b) (0.5 puntos) Justifica cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 15x + 50}$

c) (0.75 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si } x > 5 \end{cases}$ Representála

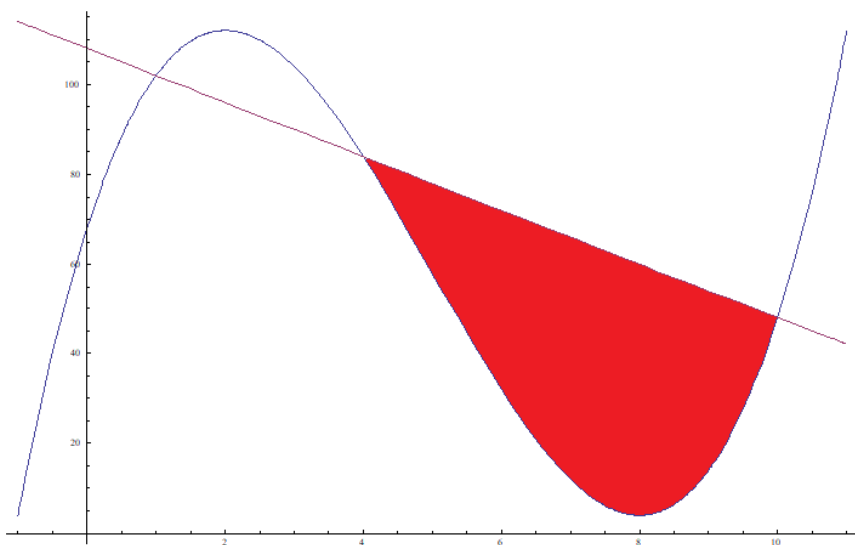
6) a) (0.75 pt) Calcular los máximos y mínimos de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

b) (0.75 pt) Sea $f(x) = \ln(x) \cdot (x^3 - 4x^2 + x + 2)$ ¿Es $f(x)$ creciente en $x = 2$?

c) (1 punto) En la gráfica están representadas

$$g(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 68 \quad \text{y} \quad f(x) = -6x + 108$$

Calcular el área sombreada, que está comprendida entre $x = 4$ y $x = 10$



$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
---	--	---------------------------

Progresiones Aritméticas	Progresiones geométricas
$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$

Trigonometría	
$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	$h^2 = a^2 + b^2$

SOLUCIONES

1) a) (0.5 puntos) Resolver la ecuación $\frac{x+1}{x-3} = \frac{3+x}{2x-3}$ es:

b) (0.5 puntos) Comprobar si $x=15$ es solución de la desigualdad $\left| \frac{2x-5}{2} - 4x \right| < 20$

c) (0.5 puntos) ¿Para qué valores de x se cumple $x^2 + x + 1 < 0$?

a) Resolvemos la ecuación.

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{3+x}{2x-3} \Rightarrow (x+1)(2x-3) = (x-3)(x+3) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 2x - 3 = x^2 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2} = \text{Sin solución}$$

Al salir un radicando negativo la ecuación no tiene solución real.

b) Comprobamos si $x=15$ cumple la desigualdad indicada.

$$\left| \frac{2x-5}{2} - 4x \right| < 20 \Bigg|_{x=15} \Rightarrow \left| \frac{2 \cdot 15 - 5}{2} - 4 \cdot 15 \right| < 20? \Rightarrow \left| \frac{30-5}{2} - 60 \right| < 20? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{25}{2} - 60 \right| < 20? \Rightarrow |12.5 - 60| < 20? \Rightarrow |-47.5| < 20? \Rightarrow 47.5 < 20? \Rightarrow \text{¡No!}$$

No se cumple la desigualdad para $x=15$.

c) Averiguamos primero cuando se cumple la igualdad $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \text{No existe solución}$$

La igualdad no tiene solución por lo que la desigualdad se cumple siempre o nunca.

Comprobamos si se cumple para un punto cualquiera de la recta real. Si se cumple para ese punto se cumple para todos los números reales, si no se cumple para ese valor no se cumple para ningún valor real. Consideramos $x=0$.

$$x^2 + x + 1 < 0 \Bigg|_{x=0} \Rightarrow 0^2 + 0 + 1 < 0? \Rightarrow 1 < 0? \Rightarrow \text{¡No!}$$

La inecuación $x^2 + x + 1 < 0$ no tiene solución.

- 2) a) (0.75 puntos) Representar gráficamente y calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1, -1)$ y $Q(3, 7)$
- b) (0.75 puntos) Calcula la ecuación de dos rectas que pasen por el punto $(1, 3)$ y sean perpendiculares entre ellas y represéntalas

a) Hallamos la pendiente de la recta que une estos dos puntos.

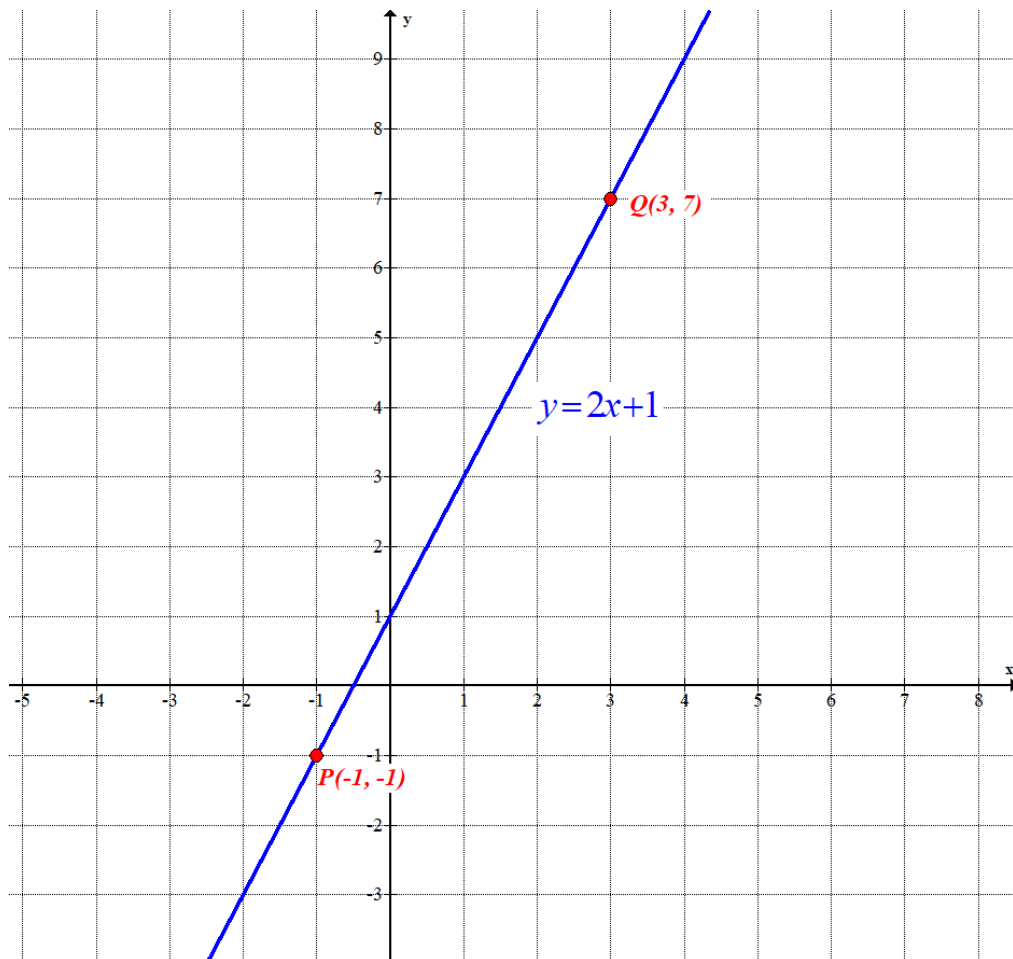
$$\left. \begin{array}{l} P(-1, -1) \\ Q(3, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{7 - (-1)}{3 - (-1)} = 2$$

Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1, -1) \in r \\ m = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-1) = 2(x - (-1)) \Rightarrow y + 1 = 2(x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 1 = 2x + 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es $y = 2x + 1$.



b) Para que dos rectas sean perpendiculares deben tener pendientes m y $m' = \frac{-1}{m}$.

Hallamos las rectas que pasan por $(1, 3)$ con pendientes 1 y -1 .

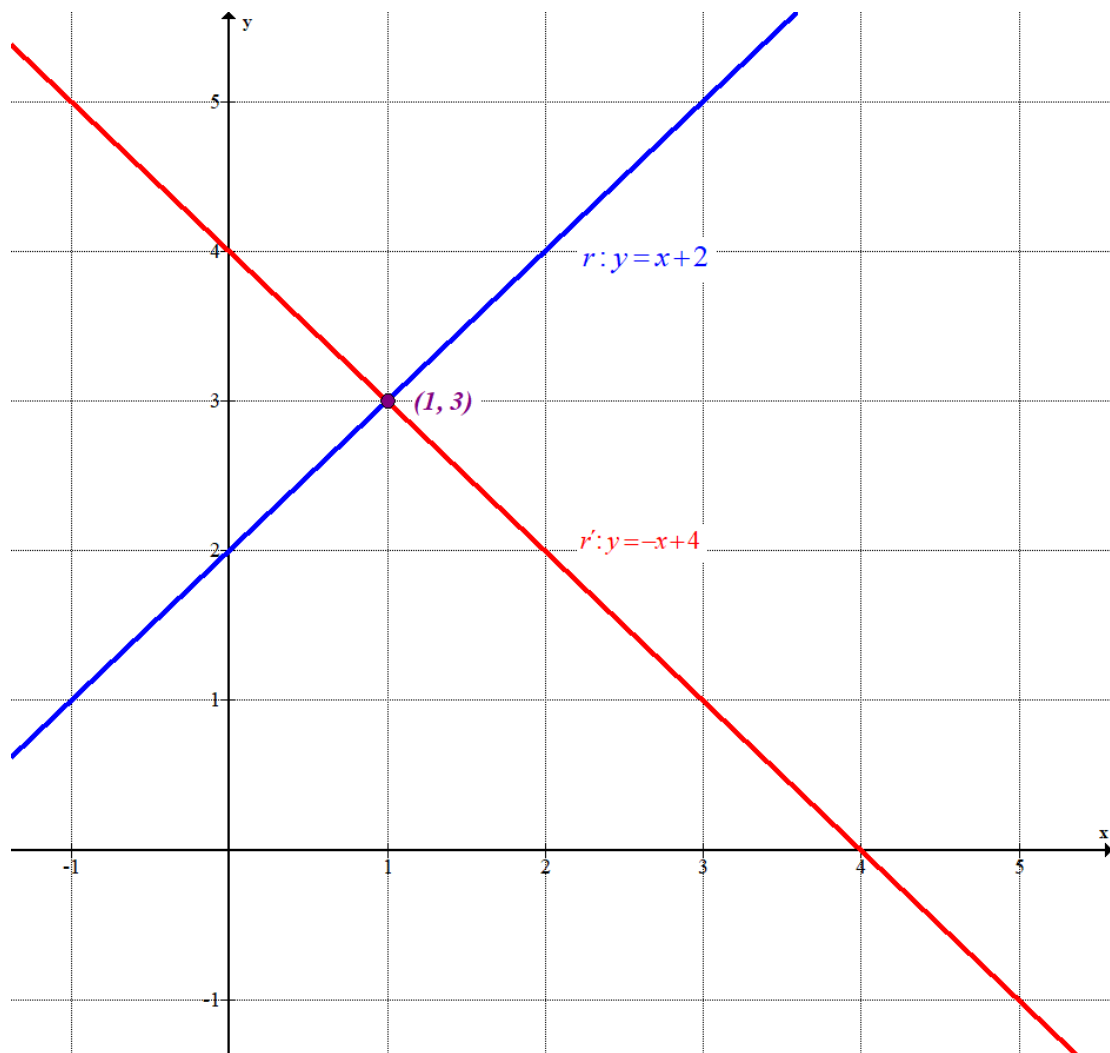
$$\left. \begin{array}{l} P(1,3) \in r \\ m=1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-3=1(x-1) \Rightarrow y-3=x-1 \Rightarrow \boxed{r: y=x+2}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,3) \in r' \\ m'=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-3=-1(x-1) \Rightarrow y-3=-x+1 \Rightarrow \boxed{r': y=-x+4}$$

Representamos las dos rectas obtenidas: $r: y=x+2$ y $r': y=-x+4$

x	$y = x + 2$
1	3
0	2

x	$y = -x + 4$
1	3
0	4



- 3) a) (0.25 puntos) Razona si un triángulo cuyos lados miden 9, 12 y 15 unidades es o no es un triángulo rectángulo.
- b) (0.25 puntos) Razona si un triángulo cuyos lados miden $3a$, $4a$ y $5a$ unidades es o no es un triángulo rectángulo.
- c) (0.5 puntos) En un triángulo rectángulo sus catetos miden 15 y a respectivamente y su hipotenusa mide $4a$. Resolver el triángulo.

- a) Para que un triángulo sea rectángulo debe cumplir el teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$.
Comprobamos si el triángulo de lados 9, 12 y 15 unidades lo cumple. Evidentemente el lado más largo lo consideramos la hipotenusa (h).

$$¿15^2 = 9^2 + 12^2? \Rightarrow ¿225 = 81 + 144? \Rightarrow \text{¡Si!}$$

Se cumple el teorema de Pitágoras y el triángulo cuyos lados miden 9, 12 y 15 unidades es un triángulo rectángulo.

- b) Repetimos el razonamiento para un triángulo cuyos lados miden $3a$, $4a$ y $5a$ unidades.

$$¿(5a)^2 = (3a)^2 + (4a)^2? \Rightarrow ¿25a^2 = 9a^2 + 16a^2? \Rightarrow \text{¡Si!}$$

Se cumple el teorema de Pitágoras y el triángulo cuyos lados miden $3a$, $4a$ y $5a$ unidades es un triángulo rectángulo.

- c) Al ser rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras.

$$(4a)^2 = a^2 + 15^2 \Rightarrow 16a^2 = a^2 + 225 \Rightarrow 15a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = \frac{225}{15} = 15 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{15} \approx 3.87}$$

El triángulo tiene catetos 15 y $\sqrt{15}$ e hipotenusa $4\sqrt{15}$.

4) a) En una progresión aritmética $a_1 = 12$ y $d = 7$.

a.1) (0.5 puntos) Calcular la suma de los 200 primeros términos.

a.2) (0.5 puntos) Calcular la suma de los términos del 121 al 200.

b) En la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{6n^2 + n - 5}{-2n^2 + n + 1}$

b.1) (0.25 puntos) ¿Calcular el término 100?

b.2) (0.5 puntos) ¿Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?

a.1) Utilizamos la fórmula de la suma $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\ a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_1 = 12 \\ d = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_{200} = \frac{(12 + a_{200}) \cdot 200}{2} \\ a_{200} = 12 + (200-1)7 = 1405 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{200} = \frac{(12 + 1405) \cdot 200}{2} = 141700$$

La suma de los 200 primeros términos de la progresión aritmética es 141700.

a.2) Calculamos la suma de los 120 primeros términos.

$$\left. \begin{array}{l} S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\ a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_1 = 12 \\ d = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_{120} = \frac{(12 + a_{120}) \cdot 120}{2} \\ a_{120} = 12 + (120-1)7 = 845 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{120} = \frac{(12 + 845) \cdot 120}{2} = 51420$$

La suma de los términos del 121 al 200 es la diferencia entre la suma de los 200 primeros y la suma de los 120 primeros: $S_{200} - S_{120} = 141700 - 51420 = 90280$.

b.1) Sustituimos n por 100.

$$a_{100} = \frac{6 \cdot 100^2 + 100 - 5}{-2 \cdot 100^2 + 100 + 1} = \frac{60095}{-19899} = 3.020001005$$

b.2) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + n - 5}{-2n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} - \frac{5}{n^2}}{-\frac{2n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{6 + \frac{1}{\infty} - \frac{5}{\infty}}{-2 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{6 + 0 - 0}{-2 + 0 + 0} = -3 \end{aligned}$$

- 5) a) (0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = \frac{6x}{5-3x}$. Calcular $(f \circ g)(4)$
- b) (0.5 puntos) Justifica cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 15x + 50}$
- c) (0.75 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si } x > 5 \end{cases}$. Representala

$$a) (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f\left(\frac{6 \cdot 4}{5 - 3 \cdot 4}\right) = f\left(\frac{24}{-7}\right) = f\left(-\frac{24}{7}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{24}{7}\right)^2 + 5 = \frac{1154}{49}$$

b) El dominio de la función son todos los valores reales que hacen positivo o cero el radicando.

$$x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 50}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{15+5}{2} = 10 \\ \frac{15-5}{2} = 5 \end{cases}$$

Los números reales los dividimos en tres zonas. Analizamos el signo del radicando en cada zona.

- En el intervalo $(-\infty, 5)$ tomamos $x = 0$ y el radicando vale $0^2 - 15 \cdot 0 + 50 = 50 > 0$. El radicando es positivo en el intervalo $(-\infty, 5)$.
- En el intervalo $(5, 10)$ tomamos $x = 6$ y el radicando vale $6^2 - 15 \cdot 6 + 50 = -4 < 0$. El radicando es negativo en el intervalo $(5, 10)$.
- En el intervalo $(10, +\infty)$ tomamos $x = 20$ y el radicando vale $20^2 - 15 \cdot 20 + 50 = 150 > 0$. El radicando es positivo en el intervalo $(10, +\infty)$.

El dominio de la función es $(-\infty, 5] \cup [10, +\infty)$.

c) La gráfica es un trozo de parábola cóncava, un trozo de recta creciente y un trozo de recta decreciente.

Hallamos el vértice de la parábola.

$$f(x) = -x^2 - 4x \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) = 4 \Rightarrow V(-2, 4)$$

Estudiamos la continuidad en los cambios de definición: $x = 1$ y $x = 5$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq -5 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

La función es discontinua en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(5) = 2 \cdot 5 - 2 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 2x - 2 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} -x + 10 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 8 \neq 5 = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

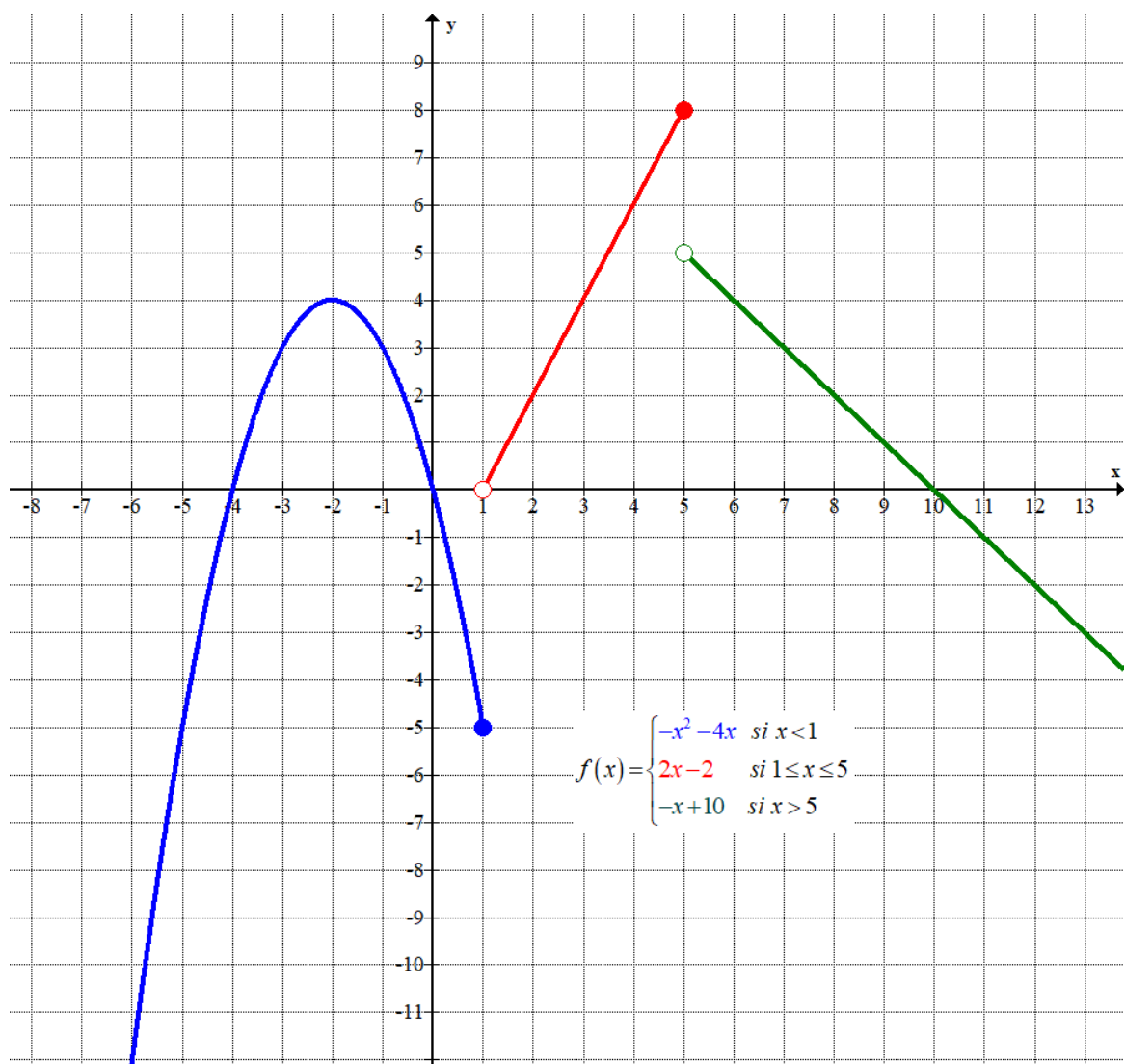
La función es discontinua en $x = 5$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la función a trozos.

x	$y = -x^2 - 4x$
-4	0
-2	4
0	0

x	$y = 2x - 2$
1	0
5	8

x	$y = -x + 10$
6	4
10	0



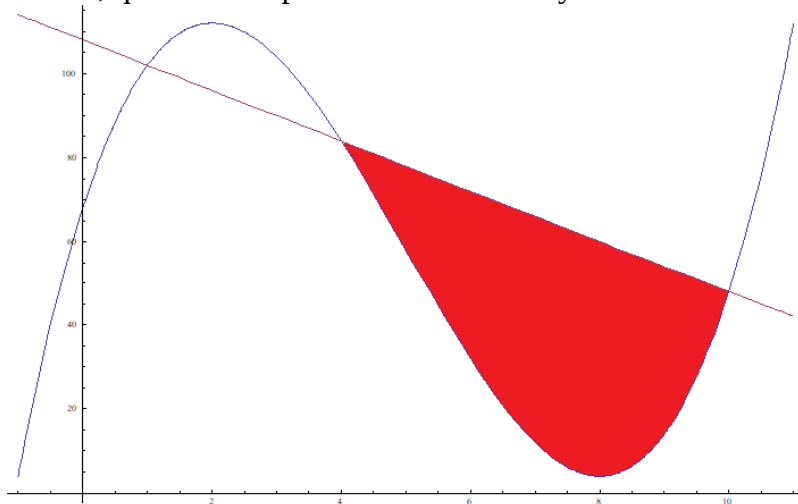
6) a) (0.75 pt) Calcular los máximos y mínimos de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

b) (0.75 pt) Sea $f(x) = \ln(x) \cdot (x^3 - 4x^2 + x + 2)$ ¿Es $f(x)$ creciente en $x = 2$?

c) (1 punto) En la gráfica están representadas

$$g(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 68 \text{ y } f(x) = -6x + 108$$

Calcular el área sombreada, que está comprendida entre $x = 4$ y $x = 10$



a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3} = \begin{cases} \frac{4 + \sqrt{13}}{3} \approx 2.53 \\ \frac{4 - \sqrt{13}}{3} \approx 0.13 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$ y $x = \frac{4 + \sqrt{13}}{3}$.

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y comprobamos su signo.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow \begin{cases} f''(2.53) = 6 \cdot 2.53 - 8 = 7.18 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \\ f''(0.13) = 6 \cdot 0.13 - 8 = -7.22 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{4 + \sqrt{13}}{3}$ y un máximo relativo en $x = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$.

b) Sustituimos este valor en la derivada de la función.

$$f(x) = \ln(x) \cdot (x^3 - 4x^2 + x + 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^3 - 4x^2 + x + 2) + \ln(x) \cdot (3x^2 - 8x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \cdot (2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 2) + \ln(2) \cdot (3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot (-4) - 3 \ln 2 = -2 - 3 \ln 2 < 0$$

Como la derivada es negativa la función es decreciente en $x = 2$.

c) El área sombreada, que está comprendida entre $x = 4$ y $x = 10$ es el valor de la integral definida de 4 a 10 de la diferencia entre $f(x) = -6x + 108$ y $g(x) = x^3 - 15x^2 + 48x + 68$.

$$\text{Área} = \int_4^{10} f(x) - g(x) dx = \int_4^{10} -6x + 108 - (x^3 - 15x^2 + 48x + 68) dx =$$

$$= \int_4^{10} -x^3 + 15x^2 - 54x + 40 dx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{15x^3}{3} - \frac{54x^2}{2} + 40x \right]_4^{10} =$$

$$= \left[\frac{-x^4}{4} + 5x^3 - 27x^2 + 40x \right]_4^{10} =$$

$$= \left[\frac{-10^4}{4} + 5 \cdot 10^3 - 27 \cdot 10^2 + 40 \cdot 10 \right] - \left[\frac{-4^4}{4} + 5 \cdot 4^3 - 27 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 \right] = \boxed{216 \text{ u}^2}$$

