

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

1.a) As matrices antisimétricas de orde 2 son da forma $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora,

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ -\alpha y & \alpha x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad XA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix},$$

así que debe cumprirse

$$[-\alpha = \alpha x; \alpha = \alpha y; -\alpha y = -\alpha; \alpha x = -\alpha] \forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [x = -1; y = 1].$$

1.b) Se $x = -1$ e $y = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2M = A^{-1} - AM \Leftrightarrow (2I + A)M = A^{-1} \Leftrightarrow M = (2I + A)^{-1}A^{-1}.$$

- $\det A = 1 + 1 = 2$.
- $A^{-1} = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(2I + A) = 9 + 1 = 10$.
- $(2I + A)^{-1} = (1/10) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^T = (1/10) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Polo tanto, a matriz pedida é a seguinte:

$$M = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 2 & 1 & 1 & m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - mF_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 3 & -3 & -3m \\ 0 & m & 3 - 2m & m - 2m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/3)F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & m & 3 - 2m & m - 2m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - mF_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & 3 - m & m - m^2 \end{pmatrix}.$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2m, \\ y - z = -m, \\ (3 - m)z = m - m^2. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{m - m^2}{3 - m}, \quad y = z - m, \quad x = y - 2z + 2m.$$

- Se $m = 3$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = -6$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2m + m - 3 = 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que o sistema é compatible determinado.

- **Caso $m = 3$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 18 + 9 - 3 = 18 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

3.a) Continuidade:

$$f(0) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + bx - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k - xe^x}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{se } k < 0, \\ -1 & \text{se } k = 0, \\ \infty & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Logo f é continua en $x = 0$ para calquera valor de b se, e só se, $k = 0$.

3.b) Derivabilidade:

É necesario que $k = 0$, co cal $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$

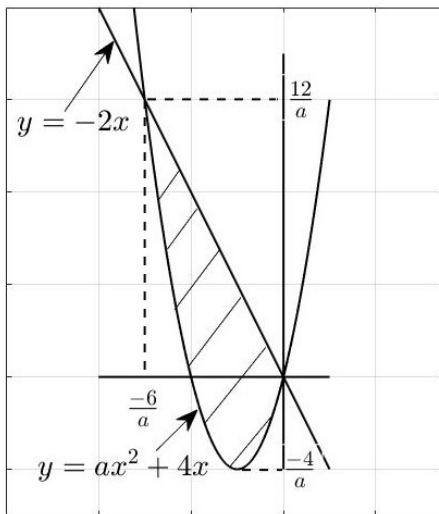
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{se } x < 0, \\ -e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + b) = b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^x) = -1.$$

Logo f é derivable en $x = 0$ se, e só se, $b = -1$ e $k = 0$.

4. $y = ax^2 + 4x$, $[y' = 2ax + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2/a]$, $y'' = 2a > 0$. Parábola convexa con vértice en $x = -2/a$.



Puntos de corte:

$$ax^2 + 4x = -2x \Leftrightarrow ax^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(ax + 6) = 0,$$

de onde $x \in \{-6/a, 0\}$.

Ademais, pola convexidade, a recta está por riba da parábola.

- Tense que cumprir

$$\int_{-6/a}^0 (-2x - ax^2 - 4x) dx = 9,$$

-

$$\int_{-6/a}^0 (-2x - ax^2 - 4x) dx = \int_{-6/a}^0 (-ax^2 - 6x) dx =$$

$$\left[-a \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-6/a}^0 = \frac{a}{3} \left(-\frac{6}{a} \right)^3 + 3 \left(-\frac{6}{a} \right)^2 = -\frac{72}{a^2} + \frac{108}{a^2} = \frac{36}{a^2}.$$

Por último,

$$\frac{36}{a^2} = 9 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2,$$

xa que $a > 0$.

5. $\pi: x + 2y - 2z = 0$, r recta que pasa por $A(2,1,2)$ e $B(0,1,1)$.

5.a) Posición relativa de r e π :

$\vec{n}_\pi(1,2,-2)$ vector normal a π ; $\vec{d}_r = \overrightarrow{BA}(2,0,1)$ vector director de r .

Como $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2 - 2 = 0$, ou ben $r \subset \pi$, ou ben $r \parallel \pi$ (sobreentendendo $r \not\subset \pi$).

Posto que $2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$, $A \in \pi$, polo que $r \subset \pi$.

5.a) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$[A \in \pi, B \in \pi] \Rightarrow r \subset \pi.$$

5.b) Ecuación implícita do plano que contén a r e é perpendicular a π :

Se chamamos π^* ao plano pedido, π^* pasa por $A(2,1,2)$ e está xerado por $\vec{n}_\pi(1,2,-2)$ e por $\vec{d}_r(2,0,1)$. Logo

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2) - 4(y-1) - 4(z-2) - (y-1) \\ = 2x - 4 - 4y + 4 - 4z + 8 - y + 1 = 2x - 5y - 4z + 9.$$

$$\pi^*: 2x - 5y - 4z + 9 = 0.$$

6.

- A recta r pasa por $A(-1, 3, -5)$, e o seu vector director é $\vec{d}_r = \overrightarrow{AB}(2, -1, 0)$. Logo

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda, \\ y = 3 - \lambda, \\ z = -5, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- O plano π pasa por $C(5, 0, 1)$, e o seu vector normal é $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(2, -1, 0)$. Logo

$$\pi: 2(x - 5) - y = 0$$

ou

$$\pi: 2x - y - 10 = 0.$$

- Punto de corte de r e π :

$$2(-1 + 2\lambda) - (3 - \lambda) - 10 = -2 + 4\lambda - 3 + \lambda - 10 = 5\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Logo o punto de corte é $P(-1 + 2 \cdot 3, 3 - 3, -5) = \mathbf{P(5, 0, -5)}$.

7. $X =$ “n.º de ovos infértiles, de entre os 7”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 7$ e $p = 0.13$ (logo $q = 1 - p = 0.87$).

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$

- $P(X = 0) = \binom{7}{0} (0.13)^0 (0.87)^7 = (0.87)^7 \approx 0.3773$.
- $P(X = 1) = \binom{7}{1} (0.13)^1 (0.87)^6 = 7 (0.13) (0.87)^6 \approx 0.3946$.

$$P(X \geq 2) \approx 1 - \{0.3773 + 0.3946\} = 1 - 0.7719 = \mathbf{0.2281}.$$

8. X = “durabilidade en horas dun aparato”.

$$X \rightarrow N(20000, 2500) \Rightarrow Z = \frac{X - 20000}{2500} \rightarrow N(0, 1).$$

8.a)

$$P(X < 17000) = P\left(Z < \frac{-3000}{2500}\right) = P(Z < -1.2) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2) \approx \\ 1 - 0.8849 = \mathbf{0.1151}.$$

8.b) Pídese d tal que $P(X > d) = 0.985$.

$$P(X > d) = P\left(Z > \frac{d - 20000}{2500}\right)$$

só pode maior que 0.5 se $\frac{d-20000}{2500} < 0$. Logo

$$P\left(Z > \frac{d - 20000}{2500}\right) = P\left(Z < \frac{20000 - d}{2500}\right) = 0.985,$$

de onde, empregando a táboa,

$$\frac{20000 - d}{2500} \approx 2.17,$$

$$20000 - d \approx 5425$$

e, finalmente,

$$\mathbf{d \approx 14575 \text{ horas.}}$$