

$$1. A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.a) A + 2B - (A + B) = B.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

$$(A + B) - B = A.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.b) A^2X - (A + B)^T = 3I - 2X.$$

$$(A^2 + 2I)X = 3I + (A + B)^T.$$

$$X = (A^2 + 2I)^{-1}(3I + (A + B)^T).$$

Temos que $(A^2 + 2I) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ polo que:

- $\det(A^2 + 2I) = 18.$
- $(A^2 + 2I)^{-1} = (1/18) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^T = (1/18) \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$

Por outro lado

$$3I + (A + B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Polo tanto, a matriz X pedida é a seguinte:

$$X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 24 & -15 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 0 & m-4 & 0 & -1 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 0 & m-4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & m & m+1 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ (m-4)y = -1, \\ mz = m+1. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{m+1}{m}, \quad y = -\frac{1}{m-4}, \quad x = \frac{3 - z - (m+2)y}{m}.$$

- Se $m = 0$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = 1$.
- Se $m = 4$, o sistema é incompatible, porque a segunda ecuación queda $0 = -1$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ m \end{array}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} m & m+2 \\ 2m & 3m \end{vmatrix} = m(m-4)$ e $\begin{vmatrix} 3m & 2 \\ m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - 2m + 8$ non se anulan á vez, tense que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^3 + 2m^2 - 8m - 2m^2 + 8m - 2m^3 - 4m^2 = m^3 - 4m^2 = m^2(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que o sistema é compatible determinado.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 0 \end{array}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -20 + 24 = 4 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
- **Caso $m = 4$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 4 \end{array}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 96 - 80 - 32 = 16 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.

3.

a)

Teorema de Rolle: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Bolzano: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b)

Tomando

$u = x^2$	$du = 2x dx,$
$dv = x e^{x^2} dx$	$v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

Temos que

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C. \end{aligned}$$

4.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos x e^{\sin x} \cos x - e^x}{2} = \frac{0+1-1}{2} = 0.$$

onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$. Falando con rigor, o que asegura a regra de L'Hôpital é que o primeiro límite existe e vale $\frac{1}{2}$ (ou 0) porque o último existe e vale $\frac{1}{2}$ (ou 0).

5.

a)

Temos o plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ e a recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$.

Para que a recta estea contida no plano, $\vec{n}_\pi(4,2,b)$ o vector normal a π ten que ser perpendicular a $\vec{d}_r = (3,2,4)$, polo tanto tería que cumprirse que $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 0$. De aquí,
 $\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 12 + 4 + 4b = 0$ polo que $b = -4$.

No caso de que $b = -4$, o plano π e a recta r son paralelos. Para que a recta estea contida no plano, o punto $A(2,c,3)$ polo que pasa a recta debe pertencer ao plano. Temos entón substituindo na ecuación do plano:

$$\pi: 4x + 2y - 4z = 2$$

$$4 \times 2 + 2 \times c - 4 \times 3 = 2$$

Polo que $c = 3$

b)

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, a distancia de P a π é

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Polo que neste caso, a distancia de $P(1,3,1)$ a $\pi': 4x + 2y - 4z - 2 = 0$ é igual a:

$$d(P, \pi') = \frac{|4 \times 1 + 2 \times 3 - 4 \times 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3}$$

6.

a)

Dados os puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ e $S(0,1,2)$, π pasa por $Q(-1,3,-5)$ e está xerado por, $\overrightarrow{QR}(4,-2,5)$ e $\overrightarrow{QS}(1,-2,7)$.

$$\text{Logo } \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -14x - 14 - 8z - 40 + 5y - 15 + 2z + 10 + 10x + 10 - 28y + 84 =$$

$$= -4x - 23y - 6z + 35 \Rightarrow \pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0.$$

b)

Recta que pasa polo punto $P(3,-1,-1)$ e perpendicular ao plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

Entón temos que $\vec{d}_r = (4,23,6)$. Entón as ecuacións paramétricas da recta son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda, \\ y = -1 + 23\lambda, \\ z = -1 + 6\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A ecuación continua da recta é:

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$$

7.

Sabendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$.

a)

Supostos que A e B son independentes, temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{4}{5}.$$

b)

Supostos que A e B son incompatibles, temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$P(\bar{A} | (\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - 0} = \frac{2}{3}.$$

8. X = “Cantidad de auga que a máquina distribúe en botellas”.

$$X \rightarrow N(500,4) \Rightarrow Z = \frac{X - 500}{4} \rightarrow N(0,1).$$

a)

$$\begin{aligned} P(499 < X < 502) &= P\left(\frac{499 - 500}{4} < Z < \frac{502 - 500}{4}\right) = P(-0,25 < Z < 0,5) \\ &= P(Z < 0,5) - P(Z < -0,25) \approx 0,6915 - 0,4013 = \mathbf{0,2902}. \end{aligned}$$

$$(*) P(Z < -0,25) = P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

b)

Pídesse a tal que $P(X > a) = 0,975$.

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a - 500}{4}\right) = 0,975$$

A probabilidade só pode maior que 0,5 se $\frac{a-500}{4} < 0$. Logo

$$P\left(Z > \frac{a - 500}{4}\right) = P\left(Z < \frac{500 - a}{4}\right) = 0,975,$$

de onde, empregando a táboa,

$$\frac{500 - a}{4} \approx 1,96,$$

$$500 - a \approx 7,84$$

e, finalmente,

$$\mathbf{a \approx 492,16 \text{ mililitros.}}$$