



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad para Mayores de 25**años Curso académico: 2024-2025****ASIGNATURA: MATEMÁTICAS****TIEMPO DE REALIZACIÓN: 1 HORA Y 30 MINUTOS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\begin{cases} mx + 4y + mz = 1 \\ x + 4my + z = m \\ 3x + (2 - 4m)y + 2z = 2 \end{cases}$$

- a) (1,25 puntos) Estudia para qué valores del parámetro “m” dicho sistema tiene solución única.
- b) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que el sistema tiene infinitas soluciones.
- c) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que no tiene solución.
- d) (0,75 puntos) Resuelve dicho sistema para $m = 2$.

2.- Dada la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcula el dominio de la función, sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) (0,75 puntos) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad. Deduce del apartado anterior si hay o no puntos de inflexión.
- c) (1 punto) Realiza un esbozo de la gráfica de dicha función que refleje las cuestiones calculadas en los apartados anteriores.

3.- Dado el plano $\pi \equiv 2x + 3y + z + 7 = 0$, se pide:

- a) (1 punto) Calcula una recta, r, que pase por el punto $P = (1, 1, 2)$ y sea perpendicular al plano π .
- b) (1 punto) Calcula el punto de intersección de la recta r y el plano π .
- c) (1 punto) Calcula la ecuación de un plano π' paralelo al plano π que contenga al punto $Q = (5, 7, 4)$.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad para Mayores de 25**años Curso académico: 2024-2025****ASIGNATURA: MATEMÁTICAS****TIEMPO DE REALIZACIÓN: 1 HORA Y 30 MINUTOS**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN B

1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\begin{cases} mx + 4y + mz = 1 \\ x + 4my + z = m \\ 3x + (2 - 4m)y + 2z = 2 \end{cases}$$

- a) (1,25 puntos) Estudia para qué valores del parámetro “m” dicho sistema tiene solución única.
- b) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que el sistema tiene infinitas soluciones.
- c) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que no tiene solución.
- d) (0,75 puntos) Resuelve dicho sistema para $m = 2$.

2.- Dada la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcula el dominio de la función, sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) (0,75 puntos) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad. Deduce del apartado anterior si hay o no puntos de inflexión.
- c) (1 punto) Realiza un esbozo de la gráfica de dicha función que refleje las cuestiones calculadas en los apartados anteriores.

3.- Una empresa posee un total de 120 autobuses que dedica por completo al transporte metropolitano de viajeros de su ciudad. Explota tres de las siete líneas que existen: Línea 1, Línea 2 y Línea 3. De los 120 autobuses, 66 cubren la Línea 1 y otros 30 cubren la Línea 2.

La probabilidad de que un autobús que cubre la Línea 1 sufra una avería, en un día cualquiera, es 0'03; el de uno que cubre la Línea 2, 0'05 y para uno de la Línea 3, 0'08. Se elige un autobús al azar de dicha empresa, se pide:

- a) (1 punto) Probabilidad de que un autobús cubra la Línea 3 y se averíe.
- b) (1 punto) Probabilidad de que un autobús sufra una avería.
- c) (1 punto) Probabilidad de que un autobús cubra la Línea 2 si ha sufrido una avería.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\begin{cases} mx + 4y + mz = 1 \\ x + 4my + z = m \\ 3x + (2 - 4m)y + 2z = 2 \end{cases}$$

- a) (1,25 puntos) Estudia para qué valores del parámetro “m” dicho sistema tiene solución única.
 b) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que no tiene solución.
 d) (0,75 puntos) Resuelve dicho sistema para $m = 2$.

Estudiamos el sistema en función del parámetro m .

El sistema dado tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} m & 4 & m \\ 1 & 4m & 1 \\ 3 & 2 - 4m & 2 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} m & 4 & m & 1 \\ 1 & 4m & 1 & m \\ 3 & 2 - 4m & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & m \\ 1 & 4m & 1 \\ 3 & 2 - 4m & 2 \end{vmatrix} = 8m^2 + 12 + m(2 - 4m) - 12m^2 - 8 - m(2 - 4m) = -4m^2 + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $m = -1$

Para $m = -1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la

1ª fila y la 1ª columna su determinante es no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14 \neq 0$

La matriz A/B tiene rango 2 pues la segunda fila es igual a la primera fila multiplicada por -1 . El rango de A/B es 2.

Como rango de A (2) es igual al rango de A/B (2), pero menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene **infinitas soluciones**.

CASO 3. $m = 1$

Para $m = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale 0.

La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la

1ª fila y la 1ª columna su determinante es no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 = 10 \neq 0$

El rango de la matriz A/B es el mismo que el de A pues la 4ª columna es igual que la 3ª. El rango de A/B es 2.

Como rango de A (2) es igual al rango de A/B (2), pero menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene **infinitas soluciones**.

- a) El sistema tiene solución única para cualquier valor de m distinto de 1 y -1 .
- b) El sistema tiene infinitas soluciones para $m = -1$ y para $m = 1$.
- c) No existe ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.
- d) Lo resolvemos para $m = 2$. Sabemos que el sistema tiene una única solución.

El sistema queda $\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 1 \\ x + 8y + z = 2 \\ 3x - 6y + 2z = 2 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 1 \\ x + 8y + z = 2 \\ 3x - 6y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 1 \\ x = 2 - 8y - z \\ 3x - 6y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2 - 8y - z) + 4y + 2z = 1 \\ 3(2 - 8y - z) - 6y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - 16y - 2z + 4y + 2z = 1 \\ 6 - 24y - 3z - 6y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12y = -3 \\ -30y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -30 \frac{1}{4} - z = -4 \Rightarrow \frac{-15}{2} - z = -4 \Rightarrow 4 - \frac{15}{2} = z \Rightarrow \boxed{z = \frac{-7}{2}} \Rightarrow \boxed{x = 2 - \frac{8}{4} - \frac{-7}{2} = \frac{7}{2}}$$

La solución del sistema para $m = 2$ es $x = \frac{7}{2}$; $y = \frac{1}{4}$; $z = \frac{-7}{2}$.

2.- Dada la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, se pide:

- (1,25 puntos) Calcula el dominio de la función, sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (0,75 puntos) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad. Deduce del apartado anterior si hay o no puntos de inflexión.
- (1 punto) Realiza un esbozo de la gráfica de dicha función que refleje las cuestiones calculadas en los apartados anteriores.

- a) Como la función tiene una expresión polinómica el dominio de la función son todos los números reales: Dominio = $\mathbb{R}$

Utilizamos la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 12x$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 6x^2 - 12x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 6x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ y $x=2$

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1) = 6(-1)^2 - 12(-1) = 18 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -6 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = 18 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$.

- b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = 6x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow x=1$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = 12 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada segunda vale $f''(2) = 12 \cdot 2 - 12 = 12 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(1, +\infty)$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ y convexa ($\cup$) en $(1, +\infty)$. La función tiene un punto de inflexión en $x=1$.

c) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$
-1	-7
0	1
1	-3
2	-7
3	1



3.- Dado el plano $\pi \equiv 2x + 3y + z + 7 = 0$, se pide:

- a) (1 punto) Calcula una recta, r , que pase por el punto $P = (1, 1, 2)$ y sea perpendicular al plano π .
 b) (1 punto) Calcula el punto de intersección de la recta r y el plano π .
 c) (1 punto) Calcula la ecuación de un plano π' paralelo al plano π que contenga al punto $Q = (5, 7, 4)$

a) La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x + 3y + z + 7 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 1)$$

$$r: \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, 1) \\ P(1, 1, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

La recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es perpendicular al plano π es $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

b) Hallamos el punto A de intersección de la recta r y el plano π resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y + z + 7 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) + 2 + \lambda + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 3 + 9\lambda + 2 + \lambda + 7 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2(-1) = -1 \\ y = 1 + 3(-1) = -2 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1, -2, 1)}$$

El punto A de intersección de la recta r y el plano π tiene coordenadas $A(-1, -2, 1)$.

c) La ecuación de un plano π' paralelo al plano $\pi \equiv 2x + 3y + z + 7 = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 2x + 3y + z + D = 0$. Para determinar el valor de D le aplico la condición de que debe contener el punto $Q = (5, 7, 4)$.

$$\left. \begin{array}{l} Q = (5, 7, 4) \in \pi' \\ \pi' \equiv 2x + 3y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 + D = 0 \Rightarrow 35 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = -35}$$

La ecuación de un plano π' paralelo al plano π que contiene al punto $Q = (5, 7, 4)$ es $\pi' \equiv 2x + 3y + z - 35 = 0$.

OPCIÓN B

1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\begin{cases} mx + 4y + mz = 1 \\ x + 4my + z = m \\ 3x + (2 - 4m)y + 2z = 2 \end{cases}$$

- a) (1,25 puntos) Estudia para qué valores del parámetro “m” dicho sistema tiene solución única.
- b) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que el sistema tiene infinitas soluciones.
- c) (1 punto) Estudia si existe algún valor de “m” para el que no tiene solución.
- d) (0,75 puntos) Resuelve dicho sistema para $m = 2$.

Igual que el ejercicio 1 de opción A

2.- Dada la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$, se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcula el dominio de la función, sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) (0,75 puntos) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad. Deduce del apartado anterior si hay o no puntos de inflexión.
- c) (1 punto) Realiza un esbozo de la gráfica de dicha función que refleje las cuestiones calculadas en los apartados anteriores.

Igual que el ejercicio 2 de opción A

3.- Una empresa posee un total de 120 autobuses que dedica por completo al transporte metropolitano de viajeros de su ciudad. Explota tres de las siete líneas que existen: Línea 1, Línea 2 y Línea 3. De los 120 autobuses, 66 cubren la Línea 1 y otros 30 cubren la Línea 2.

La probabilidad de que un autobús que cubre la Línea 1 sufra una avería, en un día cualquiera, es 0'03; el de uno que cubre la Línea 2, 0'05 y para uno de la Línea 3, 0'08. Se elige un autobús al azar de dicha empresa, se pide:

- a) (1 punto) Probabilidad de que un autobús cubra la Línea 3 y se averíe.
- b) (1 punto) Probabilidad de que un autobús sufra una avería.
- c) (1 punto) Probabilidad de que un autobús cubra la Línea 2 si ha sufrido una avería.

Llamamos $L1$, $L2$ y $L3$ a los sucesos “el autobús elegido al azar cubre la Línea 1, 2 o 3” y llamamos A al suceso “el autobús sufre avería”.

Con los datos proporcionados sabemos que

$$P(L1) = \frac{66}{120} = \frac{11}{20} = 0.55, P(L2) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ y } P(L3) = \frac{120 - 66 - 30}{120} = \frac{1}{5} = 0.2$$

También sabemos que $P(A/L1) = 0.03$, $P(A/L2) = 0.05$ y $P(A/L3) = 0.08$.

- a) Nos piden calcular $P(L3 \cap A)$.

$$P(L3 \cap A) = P(L3)P(A/L3) = 0.2 \cdot 0.08 = \boxed{0.016}$$

- b) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(L1)P(A/L1) + P(L2)P(A/L2) + P(L3)P(A/L3) = \\ &= 0.55 \cdot 0.03 + 0.25 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.08 = \boxed{0.045} \end{aligned}$$

- c) Nos piden calcular $P(L2/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(L2/A) = \frac{P(L2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(L2)P(A/L2)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.05}{0.045} = \boxed{\frac{5}{18} \approx 0.2778}$$