

 Universidad Autónoma de Madrid	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS CONVOCATORIA 2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	ESPECÍFICA
---	---	----------------------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ \alpha x + 2y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y + z = 1 \end{cases}$$

- (1.5 puntos) Discuta el sistema según los valores del parámetro real α .
- (1 punto) Resuelva para $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$ si es posible.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{x}$ se pide:

- (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- (1.5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{x-1}{2}$, calcule el área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

- (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de las dos rectas.
- (0.75 puntos) Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .
- (1 punto) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s respectivamente que pertenecen al plano de ecuación $z = 0$ determine la recta que contiene a ambos puntos.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dados dos sucesos A y B , se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0.45$,

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.85$ y $P(B/A) = 0.25$. Se pide:

- (2 puntos) Calcule $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B/\bar{A})$.
- (0.5 puntos) Deduzca de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

 Universidad Autónoma de Madrid	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS CONVOCATORIA 2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	ESPECÍFICA
---	---	----------------------------------

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$

- (1 punto) Halle el determinante de la matriz.
- (0.5 puntos) Calcule los valores de λ para los cuales no existe A^{-1} .
- (1 punto) Calcule la inversa para $\lambda = -1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^3 - x^2}$

- (0.5 puntos) Determine el dominio de la función.
- (1 punto) Calcule las asíntotas verticales de la función.
- (1 punto) Calcule las asíntotas oblicuas de la función.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dado el plano $\pi \equiv x = y + 1$ y los puntos $A = (2, 1, 0)$ y $B = (1, 0, 0)$ pertenecientes al plano π :

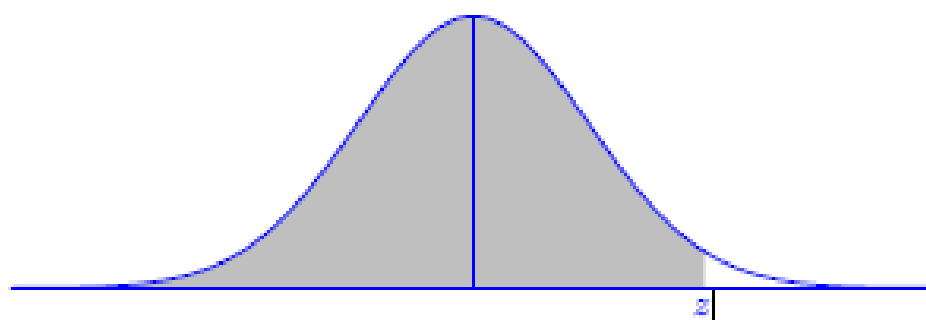
- (1.25 punto) Si A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{ABCD\}$, todos pertenecientes a π . Calcule los posibles puntos C y D.
- (1.25 punto) Si $E = (0, 1, 0)$ forma parte de la arista AE de un paralelepípedo formado por los posibles cuadrados anteriores y esta arista. Calcule el volumen los posibles paralelepípedos.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos

Queremos comprar un billete a Estocolmo desde Madrid pero no hay vuelos directos, todos tienen escala en Frankfurt. El vuelo de Madrid a Frankfurt tarda 160 min con una desviación típica de 15 min siguiendo una distribución normal.

- (1.25 puntos) Para conectar con el vuelo a Estocolmo es necesario que el avión tarde menos de $T = 180$ min. Calcule la probabilidad de perder el avión a Estocolmo.
- (1.25 puntos) Calcule el valor de T para que la probabilidad de perder el segundo avión sea del 1%.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ \alpha x + 2y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a. (1.5 puntos) Discuta el sistema según los valores del parámetro real α .
b. (1 punto) Resuelva para $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$ si es posible.

a. El sistema dado tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + \cancel{\alpha^2} + \alpha^2 - \cancel{2\alpha^2} - \alpha - \alpha = 2 - 2\alpha$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2 - 2\alpha = 0 \Rightarrow 2 = 2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $\alpha = 1$

Para $\alpha = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de eliminar la

3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$

La matriz ampliada A/B tiene la primera fila igual que la tercera. El rango de A/B es 2.

Como rango de A (2) es igual al rango de A/B (2), pero menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene **infinitas soluciones**.

- b. Por lo visto en el primer apartado para $\alpha = -1$ el sistema tiene una única solución.

El sistema queda $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z + 1 = -x \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z + 1 + 2y - z = 1 \\ y - z + 1 + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow 0 - 0 + 1 = -x \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Para $\alpha = -1$ la solución del sistema es $x = -1, y = z = 0$.

Por lo visto en el primer apartado para $\alpha = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

El sistema queda $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación 1}^a = \text{Ecuación 3}^a\} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - y - z + 2y + z = 1 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $\alpha = 1$ las soluciones son $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{x}$ se pide:

- a. (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
 b. (1.5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{x-1}{2}$, calcule el área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$.

- a. El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot x - 1 \cdot (x-1)}{x^2} = \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

Esta expresión de la derivada no se anula y siempre es positiva, por lo que la función es creciente en todo su dominio.

- b. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x-1}{x} \\ g(x) = \frac{x-1}{2} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 2x-2 = x^2-x \Rightarrow 0 = x^2-3x+2 \Rightarrow$$

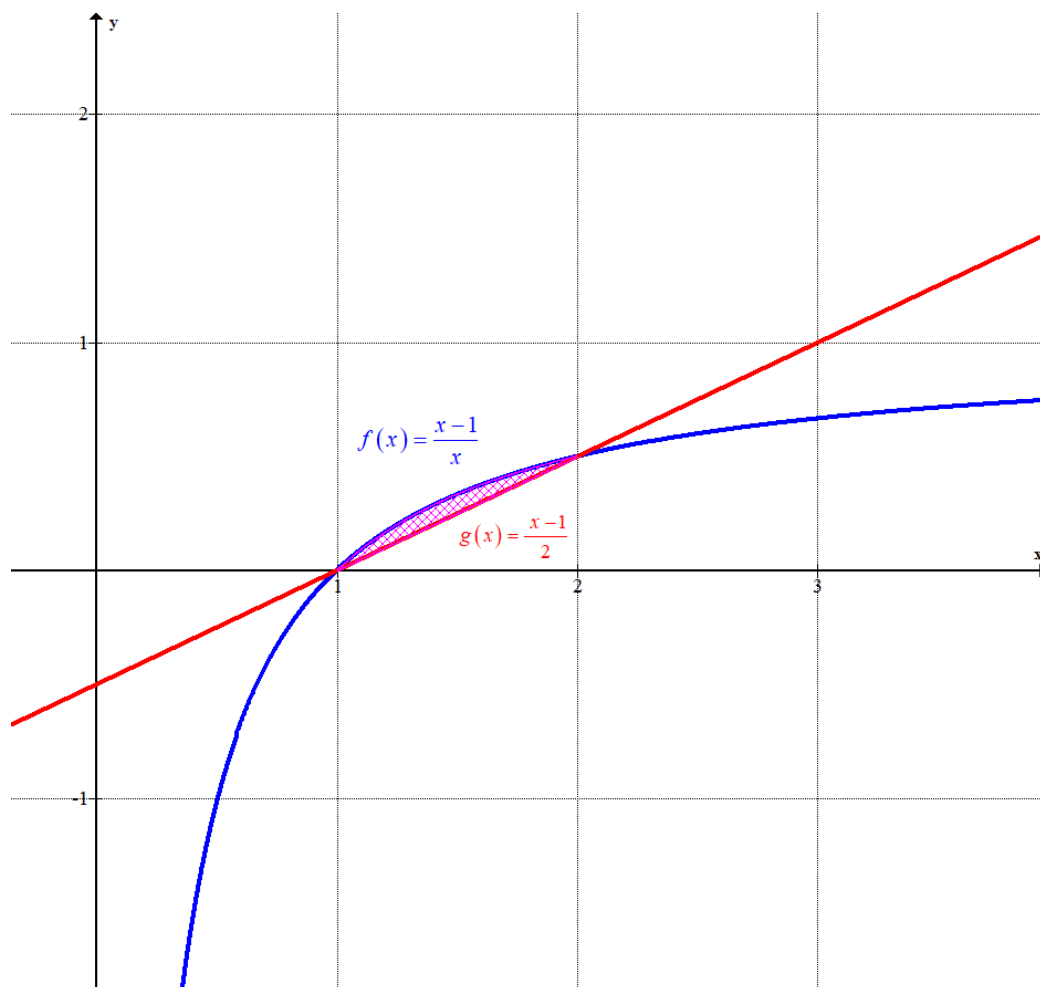
$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

El área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$ es el valor absoluto de la integral definida de 1 a 2 de la diferencia de las dos funciones. Como $f(1.5) = \frac{1.5-1}{1.5} = \frac{1}{3} \approx 0.333$ y $g(1.5) = \frac{1.5-1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$, en el intervalo $(1,2)$ se cumple que $f(x) > g(x)$ por lo que tomaremos la diferencia $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 f(x) - g(x) dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x} - \frac{x-1}{2} dx = \int_1^2 \frac{x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{x-1}{2} dx = \\ &= \int_1^2 1 - \frac{1}{x} - \frac{x-1}{2} dx = \int_1^2 1 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^2 x - 1 dx = \left[x - \ln x - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right]_1^2 = \\ &= \left[x - \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_1^2 = \left[2 - \ln 2 - \frac{2^2}{4} + \frac{2}{2} \right] - \left[1 - \ln 1 - \frac{1^2}{4} + \frac{1}{2} \right] = \end{aligned}$$

$$= 2 - \ln 2 - 1 + 1 - 1 + 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4} - \ln 2 \approx 0.057 \text{ u}^2}$$

El área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$ tiene un valor de $\frac{3}{4} - \ln 2 \approx 0.057$ unidades cuadradas.



Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

- a. (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de las dos rectas.
 b. (0.75 puntos) Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .
 c. (1 punto) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s respectivamente que pertenecen al plano de ecuación $z = 0$ determine la recta que contiene a ambos puntos.

- a. Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(2, 0, 2) \\ \vec{v}_s = (1, 1, -1) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x = 1 + 2y + z \end{cases} \Rightarrow 2 + 4y + 2z + y + 3z = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y + 5z = 5 \Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z \Rightarrow x = 1 + 2 - 2z + z = 3 - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(3, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (-1, -1, 1) \end{cases}$$

Observamos que los vectores directores tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas son paralelas o coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

Comprobamos si la recta r pasa por el punto $P_s(2, 0, 2)$ perteneciente a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P_s(2, 0, 2) \\ r \equiv \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \\ \text{¿} P_s \in r? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{¿} 2 \cdot 2 + 0 + 3 \cdot 2 = 7? \\ \text{¿} 2 - 2 \cdot 0 - 2 = 1? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{¿} 9 = 7? \\ \text{¿} 0 = 1? \end{cases}$$

No se cumplen las igualdades y el punto P_s no pertenece a la recta r . Las rectas son paralelas.

- b. El plano π que contiene a las rectas paralelas es un plano que contiene el punto $P_s(2, 0, 2)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_s = (1, 1, -1)$ y $\vec{P_sQ_r}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_s Q_r} = (3, 1, 0) - (2, 0, 2) = (1, 1, -2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_s} = (1, 1, -1) \\ P_s(2, 0, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2 - 2y + \cancel{2} - \cancel{2} - \cancel{2} + y + 2x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - 2 = 0}$$

El plano que contiene a las rectas r y s tiene ecuación $\pi: x - y - 2 = 0$.

- c. Hallamos los puntos P y Q de las rectas r y s respectivamente que pertenecen al plano de ecuación $z = 0$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow P(3, 1, 0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t = 0 \rightarrow t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow Q(4, 2, 0)$$

Determinamos la ecuación de la recta t que pasa por los puntos $P(3, 1, 0)$ y $Q(4, 2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(3, 1, 0) \in t \\ Q(4, 2, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = \overrightarrow{PQ} = (4, 2, 0) - (3, 1, 0) = (1, 1, 0) \\ Q(4, 2, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

La recta t que pasa por los puntos P y Q tiene ecuación $t: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0.45$,

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.85 \text{ y } P(B/A) = 0.25. \text{ Se pide:}$$

a. (2 puntos) Calcule $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B/\overline{A})$.

b. (0.5 puntos) Deduzca de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

a. Aplicamos una de las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.85 \Rightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0.85 \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0.85 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 1 - 0.85 = 0.15}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.25 \Rightarrow \frac{0.15}{P(A)} = 0.25 \Rightarrow \frac{0.15}{0.25} = P(A) \Rightarrow \boxed{P(A) = 0.6}$$

Este resultado es absurdo, pues la probabilidad del suceso A (0.6) es mayor que la probabilidad del suceso $A \cup B$ (0.45).

De todas formas, seguimos con el cálculo de lo que nos piden. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.45 \\ P(A) = 0.6 \\ P(A \cap B) = 0.15 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.45 = 0.6 + P(B) - 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.45 + 0.15 - 0.6 = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0 - 0.15}{1 - 0.6} = -0.375 \text{ ¡imposible!}$$

b. Para que sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.15 \\ P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15 \neq 0 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN B**Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos**

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$

- a. (1 punto) Halle el determinante de la matriz.
 b. (0.5 puntos) Calcule los valores de λ para los cuales no existe A^{-1} .
 c. (1 punto) Calcule la inversa para $\lambda = -1$.

- a. Calculamos la expresión del determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = -8\lambda + 0 + 4\lambda - 0 - \lambda^2(\lambda - 1) - 0 = -4\lambda - \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda(-\lambda^2 + \lambda - 4)$$

- b. No existe la inversa de la matriz A cuando su determinante se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 + \lambda - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ -\lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(-4)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{-2} = \nexists \end{cases}$$

La matriz A^{-1} no existe para $\lambda = 0$.

- c. para $\lambda = -1$ existe la inversa de A. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 0 - 4 - 0 + 2 - 0 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/6 & -1/3 & -1/6 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^3 - x^2}$

- (0.5 puntos) Determine el dominio de la función.
- (1 punto) Calcule las asíntotas verticales de la función.
- (1 punto) Calcule las asíntotas oblicuas de la función.

- El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

- Asíntotas verticales.** $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} = \frac{0^4 + 3 \cdot 0^3 + 1}{0^3 - 0^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} = \frac{1^4 + 3 \cdot 1^3 + 1}{1^3 - 1^2} = \frac{5}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 1$.

- Comprobamos primero si la función tiene asíntota horizontal.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

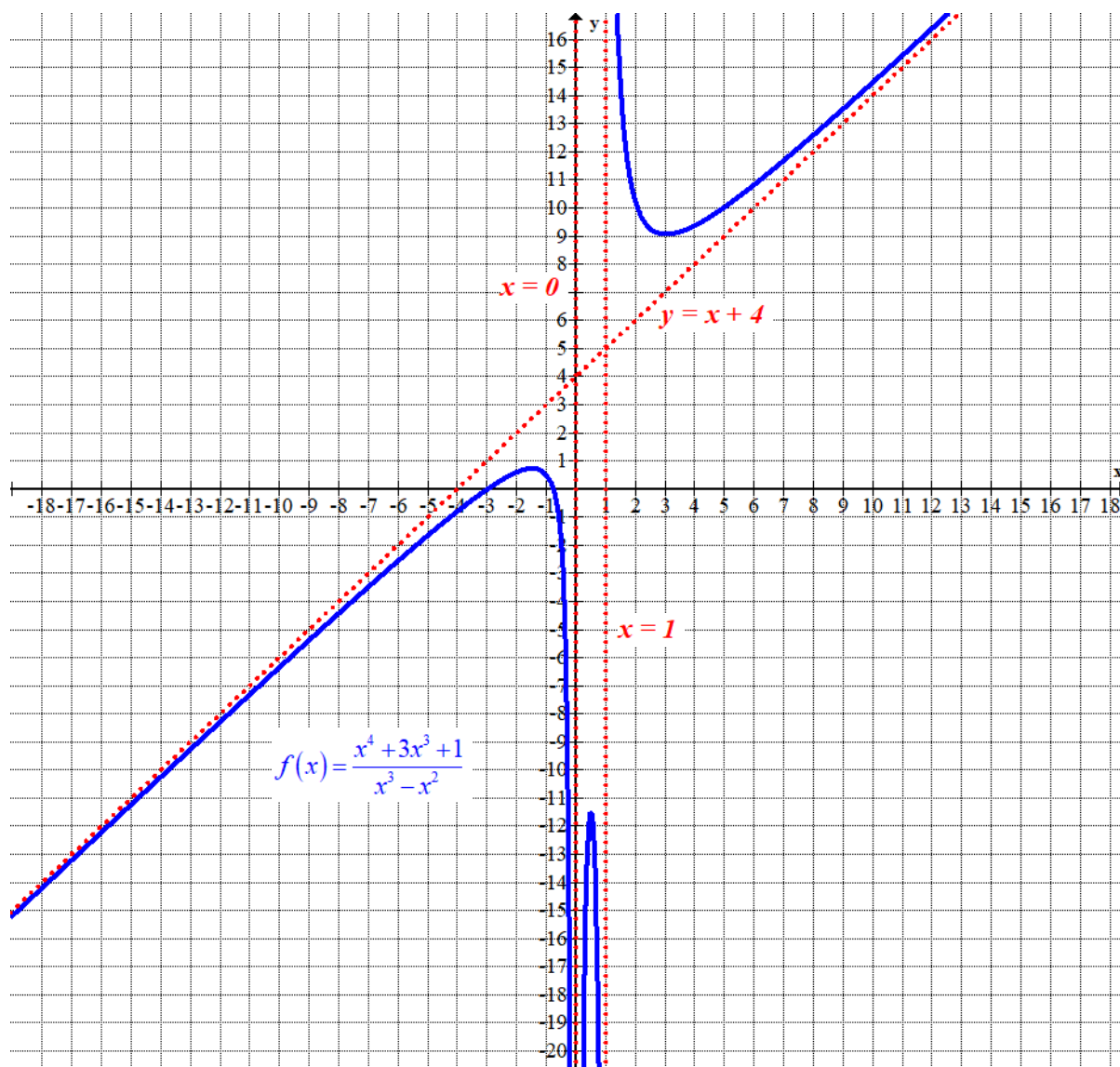
Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^3 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^4 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^4} + 3x^3 + 1 - \cancel{x^4} + x^3}{x^3 - x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 1}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{x^3} = 4$$

La función tiene a la recta $y = x + 4$ como asíntota oblicua.

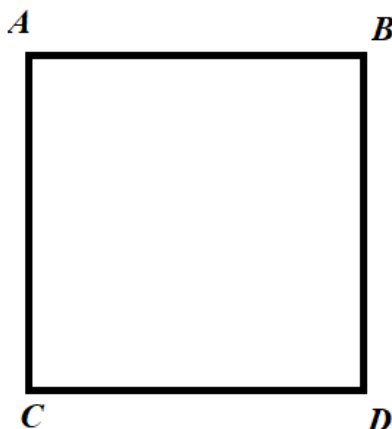


Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dado el plano $\pi \equiv x = y + 1$ y los puntos $A = (2, 1, 0)$ y $B = (1, 0, 0)$ pertenecientes al plano π :

- a. (1.25 punto) Si A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{ABCD\}$, todos pertenecientes a π . Calcule los posibles puntos C y D.
 b. (1.25 punto) Si $E = (0, 1, 0)$ forma parte de la arista AE de un paralelepípedo formado por los posibles cuadrados anteriores y esta arista. Calcule el volumen los posibles paralelepípedos.

- a. Los puntos C y D pertenecen al plano $\pi \equiv x = y + 1$ por lo que tienen coordenadas $C(a+1, a, c)$ y $D(b+1, b, d)$.



Al ser ABCD un cuadrado se cumple que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, el ángulo en el vértice A es de 90° , por lo que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es nulo: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) - (2, 1, 0) = (-1, -1, 0) \\ \overrightarrow{CD} = (b+1, b, d) - (a+1, a, c) = (b-a, b-a, d-c) \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b-a = -1 \rightarrow \boxed{b = a-1} \\ d-c = 0 \rightarrow \boxed{d = c} \end{cases}$$

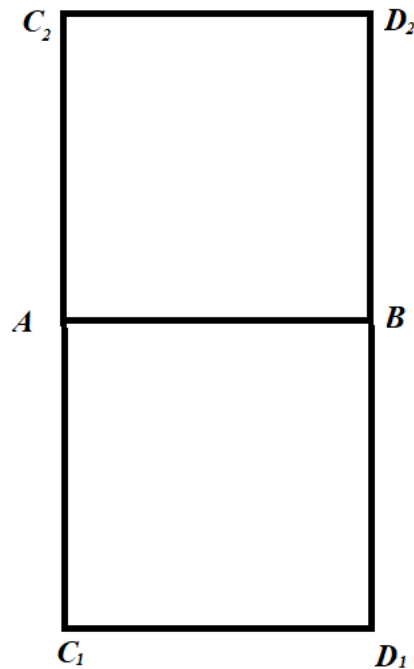
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (a+1, a, c) - (2, 1, 0) = (a-1, a-1, c) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1, -1, 0)(a-1, a-1, c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - a + 1 - a = 0 \Rightarrow 2 - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = 1 - 1 = 0}$$

Los puntos tienen coordenadas $C(1+1, 1, c) = (2, 1, c)$ y $D(1, 0, c)$. Además, la longitud del lado AC debe ser igual a la del lado AB.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 1, c) - (2, 1, 0) = (0, 0, c) \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + c^2} \Rightarrow \boxed{c = \pm\sqrt{2}}$$

Existen dos soluciones posibles: los puntos $C_1(2,1,-\sqrt{2})$ y $D_1(1,0,-\sqrt{2})$ o bien los puntos $C_2(2,1,+\sqrt{2})$ y $D_2(1,0,+\sqrt{2})$.



- b. El volumen los posibles paralelepípedos ABCDE es el valor absoluto del producto mixto $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}]$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (-1, -1, 0) \\ \vec{AC}_1 &= (2, 1, -\sqrt{2}) - (2, 1, 0) = (0, 0, -\sqrt{2}) \\ \vec{AE} &= (0, 1, 0) - (2, 1, 0) = (-2, 0, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}_1, \vec{AE}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}$$

El volumen del paralelepípedo ABC_1E es $2\sqrt{2} \approx 2.83$ unidades cúbicas.

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (-1, -1, 0) \\ \vec{AC}_2 &= (2, 1, \sqrt{2}) - (2, 1, 0) = (0, 0, \sqrt{2}) \\ \vec{AE} &= (0, 1, 0) - (2, 1, 0) = (-2, 0, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}_2, \vec{AE}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}$$

El volumen del paralelepípedo ABC_2E es $2\sqrt{2} \approx 2.83$ unidades cúbicas.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos

Queremos comprar un billete a Estocolmo desde Madrid pero no hay vuelos directos, todos tienen escala en Frankfurt. El vuelo de Madrid a Frankfurt tarda 160 min con una desviación típica de 15 min siguiendo una distribución normal.

- a. (1.25 puntos) Para conectar con el vuelo a Estocolmo es necesario que el avión tarde menos de $T = 180$ min. Calcule la probabilidad de perder el avión a Estocolmo.
- b. (1.25 puntos) Calcule el valor de T para que la probabilidad de perder el segundo avión sea del 1%.

Consideramos $X =$ Tiempo que tarda el vuelo de Madrid a Frankfurt en minutos. $X = N(160, 15)$

- a) Nos piden calcular $P(X \geq 180)$.

$$P(X \geq 180) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{180 - 160}{15}\right) = P(Z \geq 1.33) = 1 - P(Z < 1.33) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0918}$$

z_n	0.0	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236

La probabilidad de perder el avión a Estocolmo es de 0.0918.

- b) Nos piden calcular “ t ” tal que $P(X \geq t) = 0.01$.

$$P(X \geq t) = 0.01 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{t - 160}{15}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{t - 160}{15}\right) = 0.01 \Rightarrow P\left(Z < \frac{t - 160}{15}\right) = 0.99 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t - 160}{15} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325 \Rightarrow \boxed{t = 160 + 15 \cdot 2.325 = 194.875}$$

z_n	0.0	0.01	0.02	0.03	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9
2.4	0.9915	0.9918	0.9920	0.9922	0.9

El valor de T para que la probabilidad de perder el segundo avión sea del 1% es 194.875 minutos.